

۱) معادله  $(x^2 - 2x)^2 - 3(x^2 - 2x) - 4 = 0$  چند ریشه متمایز دارد؟

- ۱) ۱      ۲) ۲      ۳) ۳      ۴) ۴

۲) تعداد و علامت جوابهای حقیقی معادله  $(x^2 - 2x)^2 + 4(x^2 - 2x) = 5$  کدام است؟

- ۱) دو ریشه مثبت      ۲) دو ریشه با علامت مخالف  
۳) یک ریشه مثبت - سه ریشه منفی      ۴) دو ریشه مثبت - دو ریشه منفی

۳) تعداد جوابهای حقیقی معادله  $4x^4 - 13x^2 + 9 = 0$  کدام است؟

- ۱) ۱      ۲) ۲      ۳) ۳      ۴) ۴

۴) معادله  $(x^2 - x)^2 + (x^2 - x) - 12 = 0$  چند ریشه دارد؟

- ۱) صفر      ۲) ۴      ۳) ۲      ۴) ۱

۵) به ازای کدام مقدار  $m$  معادله  $x^2 - m - x = 0$  درجهی دوم  $x^2 - m - x = 0$  ریشهی مضاعف دارد؟

- ۱) هیچ مقدار      ۲)  $-\frac{1}{4}$       ۳)  $\frac{1}{4}$       ۴) ۱

۶) اگر  $x = 2$  ریشهی معادله  $x(x - 2a) = 1 - ax$  باشد، ریشهی دیگر کدام است؟

- ۱)  $\frac{2}{3}$       ۲)  $\frac{1}{2}$       ۳)  $-\frac{1}{2}$       ۴)  $-\frac{3}{2}$

۷) اگر  $x = 2$  یکی از ریشههای معادله  $x^2 - 5x + a = 1$  باشد، ریشهی دیگر معادله کدام است؟

- ۱) -۳      ۲) ۳      ۳) -۶      ۴) ۶

۸) کدام گزینه دربارهی ریشههای معادله  $x^2 - 5x + 1 = 0$  درست است؟

- ۱) ریشه ندارد.      ۲) دو ریشهی مثبت دارد.  
۳) یک ریشهی مثبت و یک ریشهی منفی دارد.      ۴) دو ریشهی منفی دارد.

۹) کدام معادله دارای ریشهی مضاعف  $x = \frac{1}{4}$  است؟

- ۱)  $4x^2 = 4x + 1$       ۲)  $4x^2 + 4x = -1$       ۳)  $x^2 - \frac{1}{4} = 0$       ۴)  $x^2 = x - \frac{1}{4}$

ریشه‌های معادله‌ی  $x^2 - 8x + 1 = 0$  کدام است؟

۱۰

$4 \pm \sqrt{60}$  **۴**

$4 \pm \sqrt{15}$  **۳**

$-4 \pm \sqrt{15}$  **۲**

$-4 \pm \sqrt{60}$  **۱**

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۱

$$x^2 - 2x = A \Rightarrow A^2 - 2A - 4 = 0 \Rightarrow A = -1, 4$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1, x^2 - 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{5}$$

۳ ریشه متمایز دارد.

$$y^2 + 4y - 5 = 0 \Rightarrow y = 1, -5$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با فرض  $x^2 - 2x = y$  خواهیم داشت:

با جانشین مقدار  $y$  عدد  $x$  محاسبه می‌شود:

$$x^2 - 2x = 1 \quad x^2 - 2x - 1 = 0$$

دو ریشه مثبت و منفی

$$x^2 - 2x = -5 \quad x^2 - 2x + 5 = 0$$

فاقد ریشه

پس دو ریشه با علامت مخالف دارد.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۴ جواب دارد.

۲

$$4x^4 - 13x^2 + 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 1, \frac{9}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = \pm \frac{3}{2} \end{cases}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۴

$$x^2 - x = t \Rightarrow t^2 + t - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - x = 3 \Rightarrow x^2 - x - 3 = 0 \text{ و } \Delta > 0 \Rightarrow 2 \text{ ریشه دارد} \\ x^2 - x = -4 \Rightarrow x^2 - x + 4 = 0 \text{ و } \Delta < 0 \Rightarrow \text{ریشه ندارد} \end{cases}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۵

نکته: زمانی یک معادله‌ی درجه دوم ریشه‌ی مضاعف دارد که در آن  $\Delta = 0$  باشد.

$$x^2 - x - m = 0 \xrightarrow[b=-1]{x=1} \Delta = (-1)^2 - 4(1)(-m) = 1 + 4m = 0 \Rightarrow m = -\frac{1}{4}$$

$$c = -m$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چون  $x = 2$  ریشه‌ی معادله است، پس در معادله صدق می‌کند:

۶

$$x(x - 2a) = 1 - ax \xrightarrow{x=2} 2(2 - 2a) = 1 - 2a \Rightarrow 4 - 4a = 1 - 2a \Rightarrow 4 - 1 = 4a - 2a$$

$$\Rightarrow 2a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{2} \Rightarrow \text{معادله: } x \left( x - 2 \left( \frac{3}{2} \right) \right) = 1 - \frac{3}{2}x \Rightarrow x(x - 3) = 1 - \frac{3}{2}x$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x = 1 - \frac{3}{2}x \Rightarrow x^2 - 3x - 1 + \frac{3}{2}x = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{3}{2}x - 1 = 0 \xrightarrow{\times 2} 2x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4(2)(-2) = 9 + 16 = 25 \Rightarrow x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2(2)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3+5}{4} = \frac{8}{4} = 2 \\ x = \frac{3-5}{4} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2} \end{cases} \text{ ریشه دی‌گر: } x = \frac{-1}{2}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. جواب معادله در معادله صدق می‌کند، بنابراین داریم:

۷

$$x^2 - 5x + a = 1 \xrightarrow{x=2} (2)^2 - 5(2) + a - 1 = 0 \Rightarrow 4 - 10 + a - 1 = 0 \Rightarrow a - 7 = 0 \Rightarrow a = 7$$

$$\Rightarrow \text{معادله: } x^2 - 5x + 7 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases} \text{ ریشه دی‌گر: } x = 3$$

راه حل اول:

ریشه‌های معادله را به دست می‌آوریم:

$$2x^2 - 5x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = (-5)^2 - 4(2)(1) = 17 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2(2)} > 0$$

بنابراین معادله‌ی داده‌شده دارای دو ریشه‌ی مثبت است.

راه حل دوم:

نکته: اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  باشند، داریم:

$$S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} \quad P = \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

با استفاده از نکته‌ی بالا، در معادله‌ی  $2x^2 - 5x + 1 = 0$  داریم:

$$\begin{cases} \Delta = 17 > 0 \Rightarrow \text{معادله دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد.} \\ S = \frac{5}{2} > 0 \Rightarrow \text{حاصل جمع ریشه‌ها مثبت است.} \\ P = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow \text{حاصل ضرب ریشه‌ها مثبت است.} \end{cases}$$

بنابراین معادله‌ی داده‌شده دارای دو ریشه‌ی مثبت است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. باید معادله به صورت  $(ax + b)^2 = 0$  درآید تا ریشه‌ی مضاعف داشته باشد.

بررسی گزینه‌ها:

$$۱) 4x^2 = 4x + 1 \Rightarrow 4x^2 - 4x - 1 = 0 \xrightarrow{\text{مربع کامل نیست}}$$

ریشه‌ی مضاعف ندارد.

در واقع داریم:

$$4x^2 - 4x = 1 \xrightarrow{+1} 4x^2 - 4x + 1 = 2 \Rightarrow (2x - 1)^2 = 2$$

$$\Rightarrow 2x - 1 = \pm \sqrt{2} \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2} \Rightarrow \text{دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز}$$

$$۲) 4x^2 + 4x = -1 \xrightarrow{+1} 4x^2 + 4x + 1 = 0 \Rightarrow (2x + 1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{دارای ریشه‌ی مضاعف}$$

$$۳) x^2 = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow \text{دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز}$$

$$۴) x^2 = x - \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{دارای ریشه‌ی مضاعف} \checkmark$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$x^2 - 8x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 8x = -1 \xrightarrow{+16} x^2 - 8x + 16 = 15 \Rightarrow (x - 4)^2 = 15$$

$$\Rightarrow x - 4 = \pm \sqrt{15} \Rightarrow x = 4 \pm \sqrt{15}$$

|    |   |   |   |   |
|----|---|---|---|---|
| ۱  | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۲  | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۳  | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۴  | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۵  | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۶  | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۷  | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۸  | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۹  | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۰ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |