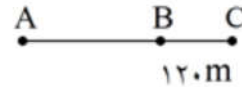


گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\Delta x = \frac{V_B + V_C}{2} t \Rightarrow 120 = \frac{V_B + 20}{2} \times 10 \Rightarrow V_B = 4 \frac{m}{s}$$

$$V_C = at + V_B \Rightarrow 20 = a \times 10 + 4 \Rightarrow a = 1.6 \frac{m}{s^2}$$

$$V_B^2 - V_A^2 = 2a\Delta x \Rightarrow 16 - 0 = 2 \times 1.6 \times AB \Rightarrow AB = 5 m$$



گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. با استفاده از رابطه‌ی مستقل از شتاب می‌توان نوشت:

$$v_1 = 36 \frac{km}{h} = 10 \frac{m}{s}, v_2 = 72 \frac{km}{h} = 20 \frac{m}{s}$$

$$\Delta x = \frac{v_1 + v_2}{2} \times \Delta t \xrightarrow{v_1=10 \frac{m}{s}, v_2=20 \frac{m}{s}, \Delta t=10 s} \Delta x = 10 + \frac{20}{2} \times 10 = 150 m$$

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\bar{V} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{t_1 + t_2} = \frac{50t_1 + 25t_2}{t_1 + t_2}$$

$$\frac{50t_1 + 25t_2}{t_1 + t_2} = 30 \Rightarrow 50t_1 + 25t_2 = 30t_1 + 30t_2 \Rightarrow \frac{t_2}{t_1} = 4$$

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. چون سطح زیر نمودار $\Delta V > 0$ است پس بیش‌ترین مقدار سرعت در E خواهد بود. دقت

کنید از $\left. \begin{matrix} C \text{ تا } B \\ E \text{ تا } D \end{matrix} \right\}$ شتاب مثبت است اگر چه شتاب کاهش می‌یابد ولی چون شتاب مثبت است باز هم سرعت در حال افزایش است.

۵

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$S_1 = \frac{12 \times 4}{2} = 24$$

$$S_2 = \frac{(4+2) \times 6}{2} = 18$$

$$24 + 10 - 18 = 16 \text{ m}$$

تا لحظه‌ی $t = 8$ متحرک A ، 16 m عقب‌تر از B است.

نسبی

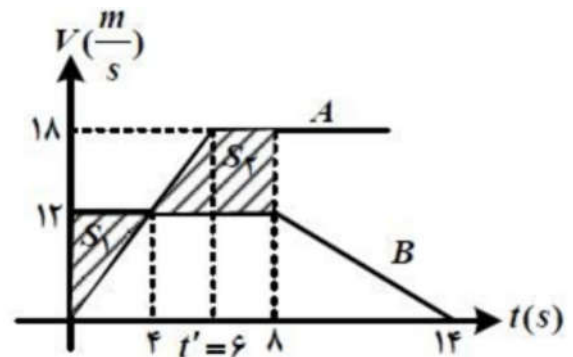
$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + V_0 t$$

$$16 = \frac{1}{2}(0+2)t^2 + (18-12)t$$

$$t^2 + 2t - 16 = 0 \quad (t+8)(t-2) = 0 \quad t = 2$$

$$8+2=10$$

$$\bar{a} = \frac{12-0}{4} = \frac{18-0}{t'} \Rightarrow 3 = \frac{18}{t'} \Rightarrow t' = 6(s)$$

نحوه‌ی یافتن زمان t' برای متحرک A :

۶

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. نکته: در حرکت با شتاب ثابت: اگر سرعت اولیه با شتاب هم‌علامت باشند، در تمامی زمان‌ها حرکت تندشونده است. اگر سرعت اولیه و شتاب مختلف‌العلامه باشند، حرکت ابتدا کندشونده و سپس تندشونده خواهد بود و اگر سرعت اولیه صفر باشد، در تمامی زمان‌ها حرکت تندشونده است.

$$x = -5t^2 + 6t + 12$$

نوع حرکت: ابتدا کندشونده و سپس تندشونده و چون علامت سرعت اولیه مثبت است، پس ابتدا در جهت مثبت

$$\text{است.} \Rightarrow \text{مختلف‌العلامه} \Rightarrow \begin{matrix} a < 0 \\ V_0 > 0 \end{matrix}$$

۷

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. فرض کنیم / طول قطار باشد، در این صورت:

$$\left. \begin{matrix} t = V \times 30 \\ t + 80 = V \times 40 \end{matrix} \right\} \Rightarrow V = 4 \text{ m/s}$$

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا با بررسی جابه‌جایی بین $t_1 = 0$ و $t_2 = 1/5$ s، با کمک معادله‌ی مستقل از شتاب، V را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta x = \frac{V_1 + V_2}{2} \Delta t$$

$$\begin{cases} t_1 = 0 \Rightarrow V_1 = V_0 \\ t_2 = 1/5 \Rightarrow V_2 = 0 \end{cases} \quad (\text{مماس ترسیمی بر نمودار مکان - زمان افقی است.})$$

$$(10 - 1) = \frac{V_0 + 0}{2} \times (1/5 - 0) \Rightarrow V_0 = 12 \frac{m}{s}$$

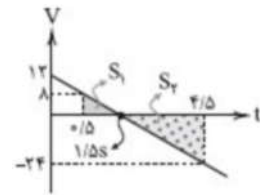
در ادامه با توجه به معادله‌ی سرعت - زمان مقدار شتاب را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} t = 1/5 \text{ s} \\ V = 0 \end{cases}, 0 = 1/5 a + 12 \Rightarrow a = -8 \frac{m}{s^2}$$

در نهایت با رسم نمودار سرعت - زمان، مسافت طی شده از $t_1 = 0/5$ s تا $t_2 = 4/5$ s را محاسبه می‌کنیم:

$$V = -8t + 12 \Rightarrow \begin{cases} t = 0/5 \Rightarrow V = 8 \frac{m}{s} \\ t = 4/5 \Rightarrow V = -24 \frac{m}{s} \end{cases}$$

$$\text{مسافت طی شده} = |S_1| + |S_2| = \frac{8 \times 1}{2} + \frac{3 \times 24}{2} = 40 \text{ m}$$



گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. سرعت متوسط در نمودار مکان- زمان، برابر شیب خط گذرنده از بین دو نقطه است. چون شیب خطوط گذرنده از دو نقطه‌ی A و B با شیب خط گذرنده بین دو نقطه‌ی B و C برابر است، بنابراین $\overline{V_1} = \overline{V_2}$ می‌باشد.

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. این حرکت با سرعت ثابت $2/6 \frac{m}{s}$ انجام شده و جابه‌جایی در ۲ ثانیه‌ی پنجم از حرکت برابر $V \Delta t_2 = 2 \times 2/6 \text{ m}$ بوده و جابه‌جایی در ثانیه‌ی سوم برابر $V \Delta t_1 = 2/6 \times 1 \text{ m}$ می‌باشد. بنابراین می‌توان

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} = \frac{1}{2} \quad \text{نوشت:}$$

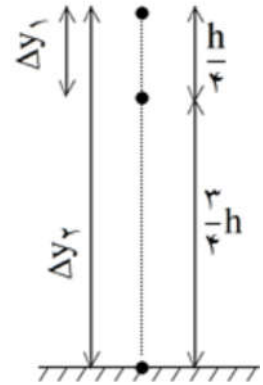
۱۱

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با استفاده از رابطه $\Delta y = \frac{1}{2}gt^2 + v \cdot t$ اگر جهت رو به پایین را با علامت مثبت در نظر

بگیریم و مدت زمان طی کردن $\frac{1}{4}$ اولیه مسیر را t فرض کنیم، چون گلوله از حال سکون رها می‌شود ($v_0 = 0$) می‌توان

$$\frac{\Delta y_2}{\Delta y_1} = \frac{\frac{1}{2}g(t+\epsilon)^2}{\frac{1}{2}gt^2} \Rightarrow \frac{h}{\frac{h}{4}} = \left(\frac{t+\epsilon}{t}\right)^2 \Rightarrow \frac{t+\epsilon}{t} = 2 \Rightarrow t = \epsilon \text{ s}$$

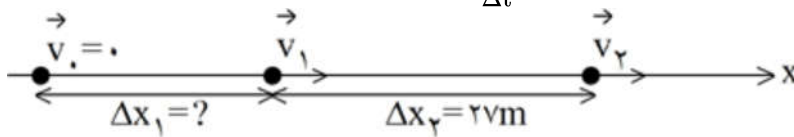
نوشت: بنابراین زمان کل حرکت برابر $\epsilon + \epsilon = 1 \text{ s}$ می‌باشد.



۱۲

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. رابطه $\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v \cdot t$ را یک بار برای ۳ ثانیه اول و بار دیگر برای ۶ ثانیه اول

می‌نویسیم، تا جابه‌جایی در ۳ ثانیه اول به دست آید، سپس از رابطه $\vec{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ ، سرعت متوسط را حساب می‌کنیم.



$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v \cdot t \xrightarrow{v_0=0} \frac{\Delta x_1}{\Delta x_1 + \Delta x_2} = \frac{\frac{1}{2}at_1^2}{\frac{1}{2}a(t_1 + t_2)^2} \xrightarrow{t_1=3s} \frac{\Delta x_1}{\Delta x_1 + 27} = \frac{9}{3}$$

$$\vec{v} = \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} = \frac{9}{3} \Rightarrow \vec{v} = 3 \frac{m}{s}$$

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. روش اول اگر جهت حرکت اتومبیل اول را به‌عنوان جهت مثبت و مکان آن در لحظه‌ی تغییر سرعت را به‌عنوان مبدأ مختصات انتخاب کنیم و معادله‌ی حرکت هریک از اتومبیل‌ها را بنویسیم، داریم:

$$x_1 = \frac{1}{2}a_1 t^2 + v_{1,0} t + x_{1,0} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} \times 3 t^2 + 10 t + 0$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{3}{2} t^2 + 10 t$$

$$x_2 = \frac{1}{2}a_2 t^2 + v_{2,0} t + x_{2,0} \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2} \times 1 \times t^2 - 20 t + 1000$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{1}{2} t^2 - 20 t + 1000$$

در لحظه‌ای که دو متحرک به‌هم می‌رسند، مکان آن‌ها یکسان می‌شود. بنابراین داریم:

$$x_1 = x_2 \Rightarrow \frac{3}{2} t^2 + 10 t = \frac{1}{2} t^2 - 20 t + 1000 \Rightarrow t^2 + 30 t - 1000 = 0 \Rightarrow (t + 50)(t - 20) = 0$$

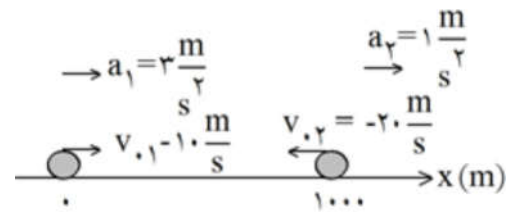
$$\Rightarrow \begin{cases} t = 20 \text{ s} & \text{ق.ق.} \\ t = -50 \text{ s} & \text{غ.ق.ق.} \end{cases}$$

روش دوم با استفاده از سرعت و شتاب نسبی حرکت نسبی آن‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$\left. \begin{aligned} v_{\text{نسبی}} &= v_1 + v_2 = 10 + 20 = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ a_{\text{نسبی}} &= a_2 + a_1 = 1 - 3 = -2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\ \Delta x_{\text{نسبی}} &= 1000 \text{ m} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta x_{\text{نسبی}} = \frac{1}{2} a_{\text{نسبی}} t^2 + v_{\text{نسبی}} t$$

$$\Rightarrow 1000 = \frac{1}{2} \times (-2) \times t^2 + 30 t \Rightarrow t^2 + 30 t - 1000 = 0$$

$$\Rightarrow (t + 50)(t - 20) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 20 \text{ s} & \text{ق.ق.} \\ t = -50 \text{ s} & \text{غ.ق.ق.} \end{cases}$$



گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

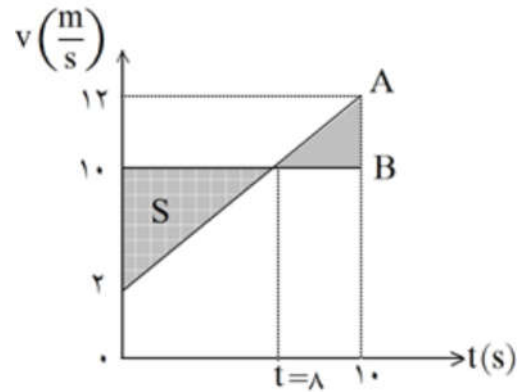
$$V_1 = 0 \quad V_A = V_1 \quad V_B = 2V_1$$

$$\left. \begin{aligned} V_1^2 - 0 &= 2a \times OA \rightarrow V_1^2 = 2a \cdot OA \\ (2V_1)^2 - V_1^2 &= 2a \times AB \rightarrow 3V_1^2 = 2a \cdot AB \end{aligned} \right\} \xrightarrow[\text{برم}]{\text{تقسیم}} \frac{V_1^2}{3V_1^2} = \frac{2a \times 50}{2a \times AB} \Rightarrow AB = 150 \text{ m}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. بعد از شروع حرکت، تا لحظه‌ای که سرعت متحرک A از سرعت متحرک B کمتر باشد، فاصله‌ی دو متحرک در حال افزایش است و وقتی سرعت دو متحرک یک‌سان می‌شود، فاصله‌ی بین آن‌ها ثابت می‌ماند و از آن لحظه به بعد متحرک A به متحرک B نزدیک می‌شود و در نهایت از آن سبقت می‌گیرد. می‌توان نشان داد که در لحظه‌ی $t = ۱۶s$ ، متحرک A از B سبقت می‌گیرد، بنابراین تا لحظه‌ی $t = ۱۰s$ ، بیش‌ترین فاصله‌ی دو متحرک مربوط به لحظه‌ای است که سرعت دو متحرک یک‌سان شود، لذا سطح محصور بین دو نمودار A و B بین لحظه‌های صفر تا t ، بیش‌ترین فاصله‌ای است که دو متحرک از هم می‌توانند داشته باشند، بنابراین با استفاده از تشابه مثلث‌ها، داریم:

$$\frac{۱۲ - ۱۰}{۱۰ - ۲} = \frac{۱۰ - t}{t} \Rightarrow t = ۸s$$

$$\Delta x_{\max} = S = \frac{۸ \times ۸}{۲} \Rightarrow \Delta x_{\max} = ۳۲m$$



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. چون معادله‌ی سرعت - زمان ذره بر روی خط راست از درجه‌ی اول است، بنابراین شتاب حرکت ثابت است و می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} t_1 = ۱s \Rightarrow v_1 = ۱۲ \frac{m}{s} \\ t_2 = ۲s \Rightarrow v_2 = ۱۴ \frac{m}{s} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{a=\text{ثابت}} \bar{v} = \frac{v_1 + v_2}{۲} = \frac{۱۲ + ۱۴}{۲} \Rightarrow \bar{v} = ۱۳ \frac{m}{s}$$

دقت کنید ثانیه‌ی دوم بازه‌ی زمانی $t_1 = ۱s$ تا $t_2 = ۲s$ است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به نمودار سرعت-زمان مشاهده می‌کنیم که در بازه‌ی زمانی صفر تا ۱ ثانیه، نمودار یک خط راست است. بنابراین در این بازه‌ی زمانی، حرکت متحرک یک حرکت با شتاب ثابت بر خط راست است. در بازه‌ی زمانی ۱ تا ۳ ثانیه از آنجایی که نمودار سرعت-زمان افقی است، متحرک حرکت یکنواخت دارد. همچنین در بازه‌ی زمانی ۳ تا ۴ ثانیه مجدداً حرکت متحرک یک حرکت با شتاب ثابت بر خط راست است. بنابراین شتاب در هریک از این بازه‌های زمانی ثابت است و نمودار آن یک خط افقی می‌باشد.

$$t = ۰ \text{ تا } t = ۱s \quad a = \bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{۶ - ۰}{۱ - ۰} = ۶ \frac{m}{s^2}$$

$$t = ۱ \text{ تا } t = ۳s \quad a = \bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{۶ - ۶}{۳ - ۱} = ۰$$

$$t = ۳ \text{ تا } t = ۴s \quad a = \bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{۲ - ۶}{۴ - ۳} = -۴ \frac{m}{s^2}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مسافت، طول مسیر طی شده است و برابر است با:

$$d = |\overline{AB}| + |\overline{BC}| = 30 + 10 = 40 \text{ m}$$

جابه‌جایی برداری است که ابتدای آن مکان اولیه و انتهای آن مکان پایانی جسم است و از تفاضل دو بردار مکان به‌دست می‌آید.

$$\Delta x = x_C - x_A = 5 = 5 - (-15) = 20 \text{ m}$$

و می‌توان نوشت:

$$\frac{d}{\Delta x} = \frac{40}{20} = 2$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با مقایسه‌ی معادله‌ی حرکت متحرک با رابطه‌ی $x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$ داریم:

$$x = -t^2 - 4t + 2 \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \frac{m}{s^2} \\ v_0 = -4 \frac{m}{s} \\ x_0 = 2 \text{ m} \end{cases}$$

چون a و v_0 هر دو منفی هستند، با گذشت زمان، اندازه‌ی سرعت متحرک همواره افزایش می‌یابد و بنابراین حرکت آن تندشونده است. از طرفی بنابه رابطه‌ی سرعت متوسط متحرک در t' ثانیه‌ی اول حرکتش، داریم:

$$v = at' + v_0 \text{ و } \bar{v} = \frac{v + v_0}{2} \Rightarrow \bar{v} = \frac{at' + v_0 + v_0}{2}$$

$$\Rightarrow \bar{v} = \frac{1}{2}at' + v_0 \Rightarrow -9 = \frac{1}{2}(-2)t' + (-4) \Rightarrow t' = 5 \text{ s}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چون متحرک از حالت سکون شروع به حرکت کرده است، بنابراین الزاماً ابتدا حرکت آن تندشونده است. با توجه به این‌که سطح محصور بین نمودار شتاب-زمان با محور زمان برابر با اندازه‌ی تغییرات سرعت است، تا لحظه‌ی $t = 2 \text{ s}$ داریم:

$$\Delta v = S = \frac{-4 \times 2}{2} = -4 \frac{m}{s} \Rightarrow v_2 - v_0 = -4 \frac{m}{s} \xrightarrow{v_0=0} v_2 = -4 \frac{m}{s}$$

با توجه به تقارن، سرعت متحرک در لحظه‌ی $t = 4 \text{ s}$ برابر با صفر خواهد بود ($v_4 = 0$)، بنابراین در بازه‌ی زمانی $t = 2 \text{ s}$ تا $t = 4 \text{ s}$ ، حرکت متحرک کندشونده است. از لحظه‌ی $t = 4 \text{ s}$ به بعد نیز چون متحرک از حال سکون شروع به حرکت می‌کند، بنابراین حرکت متحرک تندشونده خواهد بود.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. چون نمودار مکان - زمان حرکت جسم روی خط راست به‌صورت سهمی است. بنابراین جسم با شتاب ثابت در حال حرکت است. پس شتاب لحظه‌ای با شتاب متوسط در هر بازه‌ی زمانی برابر است. از طرفی می‌دانیم شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان در هر لحظه، سرعت جسم در آن لحظه را نشان می‌دهد، بنابراین شیب خط مماس بر نمودار در لحظه‌ی $t = 4 \text{ s}$ که برابر با سرعت در لحظه‌ی $t = 4 \text{ s}$ است، با توجه به نمودار برابر است

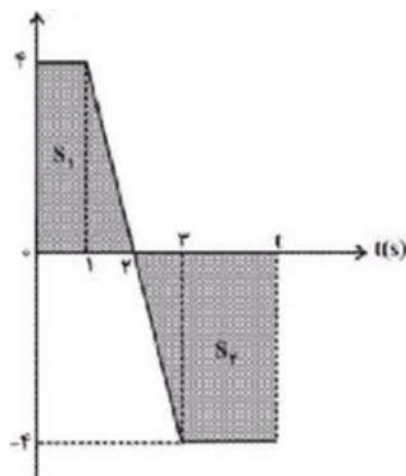
$$V_4 = \frac{0 - 10}{4 - 0} \Rightarrow v_4 = -5 \frac{m}{s} \quad \text{با:}$$

هم‌چنین خط مماس بر نمودار در لحظه‌ی $t = 2 \text{ s}$ افقی است، بنابراین سرعت در این لحظه برابر با صفر است ($V_2 = 0$). در نتیجه شتاب متوسط جسم در دو ثانیه‌ی دوم حرکت (بازه‌ی زمانی $t_1 = 2 \text{ s}$ تا $t_2 = 4 \text{ s}$) برابر است با:

$$\bar{a} = a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{-5 - 0}{4 - 2} \Rightarrow \bar{a} = -2.5 \frac{m}{s^2}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. می‌دانیم سطح زیر نمودار شتاب - زمان با محور زمان برابر با تغییرات سرعت در بازه‌ی زمانی مربوطه می‌باشد. اگر این سطح بالای محور زمان باشد، سرعت متحرک افزایش می‌یابد و اگر پایین محور زمان باشد، سرعت متحرک کاهش می‌یابد. بنابراین سرعت این متحرک ت $t = ۲$ s افزایش و از آن به بعد کاهش می‌یابد. بنابراین تغییر سرعت تا لحظه‌ی t برابر است با:

$$\Delta v = v - v_0 = D_1 = S_1 \Rightarrow 0 - 4 = \frac{(2+1)}{2} \times 4 - \frac{(t-2) + (t-3)}{2} \times 4 \Rightarrow 20 = 4t \Rightarrow t = 5 \text{ s}$$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اندازه‌ی جابه‌جایی در ۱۰ ثانیه‌ی اول برابر با مساحت مثلث OAB است. پس:

$$\Delta x_1 = \frac{1}{2} \times OB \times AB = \frac{1}{2} \times 10 \times V_{\max} = 5 V_{\max}$$

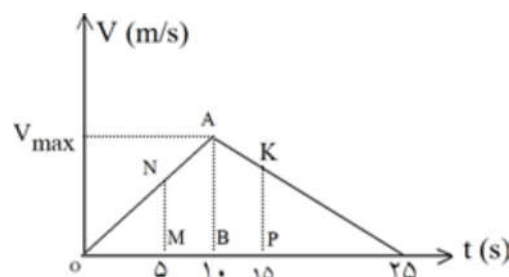
$t = 15 \text{ s}$ تا $t = 5 \text{ s}$ اندازه‌ی جابه‌جایی $S_{MNAB} + S_{ABPK}$

$$= \frac{1}{2} (MN + AB) \times MB + \frac{1}{2} (AB + KP) \times BP = \Delta x_2$$

با توجه به تناسب مثلث‌ها می‌توان نتیجه گرفت که $MN = \frac{1}{2} V_{\max}$ و $KP = \frac{2}{3} V_{\max}$

بنابراین:

$$\begin{aligned} \Delta x_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} V_{\max} + V_{\max} \right) \times 5 + \frac{1}{2} \left(V_{\max} + \frac{2}{3} V_{\max} \right) \times 5 \\ \Rightarrow \Delta x_2 &= \frac{5}{2} \times \frac{3}{2} V_{\max} + \frac{5}{2} \times \frac{5}{3} V_{\max} = \frac{95}{12} V_{\max} \\ \Rightarrow \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} &= \frac{\frac{95}{12} V_{\max}}{5 V_{\max}} = \frac{95}{12 \times 5} = \frac{19}{12} \end{aligned}$$

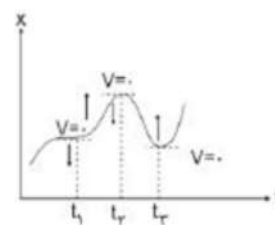


گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

۲۴

۳ بار سرعت متحرک صفر شده در دو لحظه‌ی t_1 و t_2 متحرک تغییر جهت داده است.

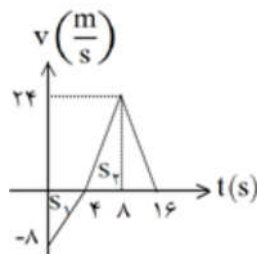
در نمودار $x - t$:



گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانیم سرعت متوسط برابر تغییر مکان در یکای زمان است: $\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$. از طرفی سطح

۲۵

محصور بین نمودار سرعت-زمان برابر تغییر مکان جسم است.



$$\Delta x_1 = -S_1 = -16m$$

$$\Delta x_2 = S_2 = 144m$$

$$\bar{v} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{\Delta t_1 + \Delta t_2} = \frac{128}{16} = 8 \frac{m}{s}$$

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

۲۶

$$\Delta y_1 = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow 45 = 5 \times t^2 \Rightarrow t = 3s$$

$$t = 3s \Rightarrow \Delta y_2 = 5 \times 4 = 20m$$

$$t = 0.5s \Rightarrow \Delta y_3 = 5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1/25m$$

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{25}{1/25} = 20$$

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

۲۷

$$V = at + V_0 \Rightarrow 2V_0 = at + V_0 \Rightarrow at = V_0$$

$$V' = a(2t) + V_0 = 2at + V_0 = 2V_0 + V_0 = 3V_0$$

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. مساحت سطح محصور بین نمودار شتاب - زمان با محور زمان برابر تغییرات سرعت

۲۸

می‌باشد، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\Delta v = S_{\text{دورزنه}} \Rightarrow \Delta v = \left(\frac{8+4}{2}\right) \times 3 = 18 \frac{m}{s}$$

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{18}{3} = 6 \frac{m}{s^2}$$

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. وقتی متحرک به نقطه‌ی اول حرکت برمی‌گردد به این معنی است که جابه‌جایی آن صفر

۲۹

می‌شود. به عبارت دیگر باید مساحتی را در نظر گرفت که صفر باشد و سرعت متوسط نیز صفر می‌شود.

$$\text{مساحت زیر محور زمان } s_1 = \frac{4 \times 10}{2} = 20$$

$$\text{مساحت بالای محور زمان } s_2 = \frac{2 \times 5}{2} + 5(t-4)$$

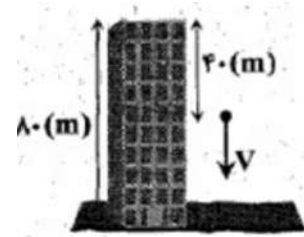
$$\Delta x = s_2 - s_1 = 0 \Rightarrow t = 9s$$

$$\Delta y = \frac{1}{2} a t^2 + V_0 t = -5 \times 4^2 + 0 = -80 (m)$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۳۰

ارتفاع محل رها کردن سنگ ۸۰ متر است، پس در نیمه‌ی راه سنگ ۴۰ متر از نقطه‌ی شروع پایین آمده است.

$$V^2 - V_0^2 = 2a\Delta y \Rightarrow V^2 - 0 = 2 \times (-10) \times (-40) \Rightarrow V = 20 \sqrt{2} \frac{m}{s}$$



$$t = \frac{\Delta x}{V} = \frac{AB}{120}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۳۱

$$\bar{V} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{AB - \frac{1}{4} AB}{\frac{AB}{120} + \frac{1}{4} \frac{AB}{360}} = \frac{\frac{3}{4} AB}{\frac{4AB}{360}} = \frac{360 \times 3}{4} = \frac{45 \times 3}{2} = 67.5 \frac{km}{h}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. شتاب حرکت ثابت است. $(a = 5 \frac{m}{s^2})$ ۳۲

$$V = 0 \Rightarrow 5t - 10 = 0 \Rightarrow t = 2(s)$$

حرکت کندشونده است. $V, a \Rightarrow$ مختلف‌العلامت هستند. $0 < t < 2 \Rightarrow V < 0$

حرکت کندشونده است. $V, a \Rightarrow$ هم‌علامت هستند. $2 < t \Rightarrow V > 0$

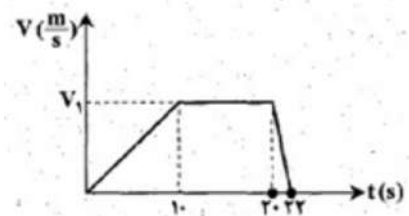
گزینه ۲ پاسخ صحیح است. محاسبه‌ی مدت زمان ترمز: ۳۳

$$\left. \begin{aligned} V = a_1 t + V_1 \Rightarrow V_1 = 10 a + 0 = 10 a \\ V = a_2 t + V_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 0 = \Delta t \times (-5a) + V_1$$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{-V_1}{-5a} = \frac{10 a}{5 a} = 2(s)$$

$$S = \Delta x \Rightarrow 320 = \frac{22 + 10}{2} \times V_1 \Rightarrow V_1 = 20 \frac{m}{s}$$

$$\Rightarrow 10 a = 20 \Rightarrow a = 2 \frac{m}{s^2}$$



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۳۴

$$x = -t^2 + 6t + 20 \Rightarrow V_x = \frac{dx}{dt} = -2t + 6 \Rightarrow V_x = 0 \Rightarrow -2t + 6 = 0 \Rightarrow t = 3s$$

در لحظه‌ی $t = 3s$ سرعت متحرک صفر می‌شود، بنابراین قبل از آن حرکت متحرک کند شونده بوده و پس از آن حرکت تندشونده خواهد بود.

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. اگر زمان کل را t فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{1}{2}at^2 - \frac{1}{2}a(t-2)^2 = 100 \Rightarrow \frac{1}{2}(2)t^2 - \frac{1}{2}(2)(t-2)^2 = 100 \Rightarrow t = 26s$$

$$\vec{V} = \frac{\Delta x_{\text{کل}}}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2}at^2}{t} = \frac{1}{2}at = \frac{1}{2}(2)(26) = 26 \frac{m}{s}$$

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. در بازه‌ی زمانی $t = 11$ تا $t = 16$ شتاب برابر است با: $a = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{0 - 10}{5} = -2 \frac{m}{s^2}$

$$V = at' + V_0 \Rightarrow V_t = -2(t - 11) + 10 = -2t + 22 + 10 = -2t + 32$$

چون $x_A = x_B$ و دو متحرک A و B وقتی به هم می‌رسند که در آن لحظه $x_A = x_B$ باشد، بنابراین می‌توان گفت دو متحرک وقتی به هم می‌رسند که $\Delta x_A = \Delta x_B$ باشد.

$$\Delta x_A = \Delta x_B \Rightarrow S_A = S_B \Rightarrow \frac{2+12}{2} \times 5 + (t-5) \times 12 = 11 \times 10 + \frac{(10 + (-2t + 32))(t-11)}{2}$$

$$\Rightarrow 35 + 12t - 60 = 110 + 32t - t^2 - 231 \Rightarrow t^2 - 20t + 96 = 0 \Rightarrow t = 12s \quad (\text{مورد قبول نیست})$$

راه حل تستی: اگر بنا بر فرض بعد از t ثانیه به یکدیگر برسند و حرکت متحرک B فقط با سرعت ثابت باشد.

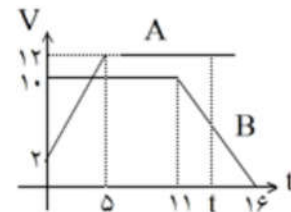
$$S_A = S_B$$

$$(2+12) \frac{5}{2} + (t-5)12 = 10t$$

$$35 + 12t - 60 = 10t$$

$$2t = 25 \rightarrow t = 12.5$$

چون در لحظه‌ی $t = 11$ ثانیه حرکت کندشونده‌ی B آغاز شده است یعنی سرعت کم شده و B جلوتر است، بنابراین جواب از 12.5 کمتر و از 11 بیش‌تر یعنی $t = 12$ ثانیه است.



گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. چون سرعت جسم ثابت است، حرکت آن یک‌نواخت است. بنابراین باید زمان‌ها و مکان‌های مربوط به آن‌ها در معادله‌ی حرکت یک‌نواخت صدق کند و می‌توان نوشت:

$$x = vt + x_0 \Rightarrow \begin{cases} 11 = v \times 2 + x_0 \\ 31 = v \times 7 + x_0 \end{cases} \Rightarrow v = 4 \frac{m}{s}, x_0 = 3m$$

بنابراین معادله‌ی مکان - زمان حرکت جسم برابر است با:

$$\Rightarrow x = 4t + 3$$

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. در مدت زمان واکنش راننده ($0.5s$)، اتومبیل با سرعت ثابت $10 \frac{m}{s}$ در حال حرکت است.

بنابراین مسافت طی شده توسط اتومبیل در این مدت برابر است با:

$$x_1 = v \cdot t = 10 \times (0.5) = 5m$$

بعد از ترمز کردن، اتومبیل حداکثر می‌تواند مسافت $5m = 10 - 5$ را تا قبل از برخورد به مانع طی کند و بایستد. بنابراین می‌توان نوشت:

$$v_2^2 - v_1^2 = 2a\Delta x \xrightarrow{v_2=0, v_1=10 \frac{m}{s}, \Delta x=5m} 0^2 - 10^2 = 2a(5) \Rightarrow a = -10 \frac{m}{s^2} \Rightarrow |a|_{min} = 10 \frac{m}{s^2}$$

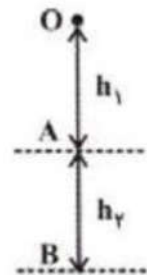
$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v \cdot t$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \Delta x_1 &= \frac{1}{2}(-4)t^2 + v \cdot t = -2t^2 + v \cdot t \\ \Delta x_2 &= \frac{1}{2}(-4)t^2 + vt = -2t^2 + vt \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta x_1 + \Delta x_2 = 64m = -8 + 2(v + v) \\ \Rightarrow \Delta x_{\text{کل}} = 128m$$

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. اگر محل رها شدن گلوله را مبدأ مکان و جهت رو به پایین را با علامت مثبت در نظر

بگیریم، با استفاده از رابطه‌ی $\Delta y = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t$ در مسیرهای OA و OB می‌توان نوشت:

$$h_1 = \frac{1}{2}gt_1^2 \Rightarrow \frac{h_1}{h_1 + h_2} = \left(\frac{t_1}{t_1 + t_2} \right)^2 \\ h_1 + h_2 = \frac{1}{2}g(t_1 + t_2)^2 \\ \xrightarrow{t_1 = \frac{5}{3}t_2} \frac{h_1}{h_1 + h_2} = \left(\frac{\frac{5}{3}t_2}{\frac{5}{3}t_2 + t_2} \right)^2 \\ \Rightarrow \frac{h_1}{h_1 + h_2} = \frac{25}{49} \Rightarrow \frac{h_1}{h_2} = \frac{25}{24}$$



گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا شتاب حرکت متحرک A را به دست می‌آوریم:

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + V \cdot t \Rightarrow 10 = \frac{1}{2} \times a \times 4 + 0 \Rightarrow a = 5 \frac{m}{s^2}$$

از طرفی سرعت متحرک B را نیز نیاز داریم. چون حرکت این متحرک یکنواخت است، داریم:

$$V = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{10 - 5}{2} = 2.5 \frac{m}{s}$$

حالا با استفاده از معادله‌ی سرعت متحرک A، مدت زمانی را که لازم است تا سرعت این متحرک به $2.5 \frac{m}{s}$ برسد، به

$$V = at + V_0 \Rightarrow 2.5 = 5t + 0 \Rightarrow t = 0.5s$$

دست می‌آوریم:

بررسی سایر گزینه‌ها:

(۲) بسیاری فکر می‌کنند همیشه زمانی که سرعت دو متحرک در این‌گونه سؤال‌ها برابر می‌شود نصف زمانی است که به هم می‌رسند. ولی این‌جا چون Δx ها برابر نیستند این اتفاق نمی‌افتد.

(۳) برای زیبایی گزینه‌ها!

(۴) کسی که عجله کند و از روی نمودار پاسخ دهد به این گزینه می‌رسد.

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. چون شتاب متحرکی که در مسیری مستقیم حرکت می‌کند ثابت است، می‌توان از رابطه‌ی $\Delta x = \frac{v + v_0}{2} \Delta t$ ، سرعت اولیه‌ی متحرک را حساب کرد. دقت کنید در لحظه‌ی $t = 5s$ که شیب خط مماس بر نمودار صفر است، سرعت متحرک برابر با صفر می‌باشد.

$$\Delta x = \frac{v + v_0}{2} \Delta t \xrightarrow[\Delta t = 5s]{\Delta x = 0 - 25 = -25m, v = 0} -25 = \frac{0 + v_0}{2} \times 5 \Rightarrow v_0 = -10 \frac{m}{s}$$

اکنون شتاب متحرک را به دست می‌آوریم:

$$\bar{a} = a = \frac{v - v_0}{\Delta t} \Rightarrow a = \frac{0 - (-10)}{5} \Rightarrow a = \frac{10}{5} = 2 \frac{m}{s^2}$$

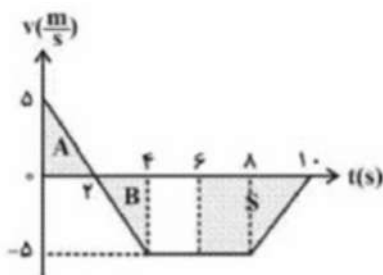
حال سرعت متحرک در لحظه‌ی $t = 2s$ را حساب می‌کنیم:

$$v = at + v_0 \xrightarrow[a = 2 \frac{m}{s^2}]{v_0 = -10 \frac{m}{s}} v_2 = 2 \times 2 - 10 = -6 \frac{m}{s}$$

در نتیجه چون حرکت با شتاب ثابت در مسیری مستقیم است، می‌توان نوشت:

$$\bar{v} = \frac{v_2 + v_0}{2} = \frac{-6 - 10}{2} = -8 \frac{m}{s}$$

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به تساوی دو مثلث A و B در شکل زیر، در بازه‌ی زمانی ۰ تا ۲s، متحرک، جابه‌جایی مثبت و در بازه‌ی زمانی ۲s تا ۴s متحرک به همان اندازه جابه‌جایی منفی دارد. بنابراین از لحظه‌ی $t = 0$ تا $t = 4s$ ، متحرک پس از توقف، دوباره به مکان $x = 10m$ برمی‌گردد. لذا برای محاسبه‌ی لحظه‌ای که متحرک در مکان منفی قرار می‌گیرد، از لحظه‌ی ۴s به بعد را بررسی می‌کنیم. برای حل، معادله‌ی مکان متحرک را در بازه‌ی زمانی ۴s تا ۸s می‌نویسیم:



$$x = v(t - 4) + 10$$

$$x = -5(t - 4) + 10 = 0 \Rightarrow t = 6s$$

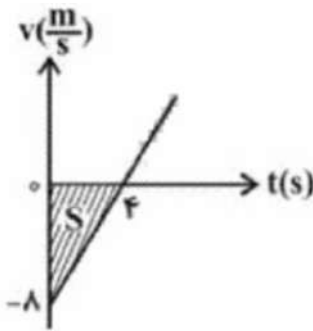
بنابراین از لحظه‌ی $t = 6s$ به بعد مکان متحرک منفی می‌شود. حال برای محاسبه‌ی سرعت متوسط، اندازه‌ی جابه‌جایی متحرک را از $t_1 = 6s$ تا $t_2 = 10s$ محاسبه می‌کنیم که برابر با مساحت زیر نمودار سرعت - زمان می‌باشد.

مساحت زیر نمودار از $t_1 = 6s$ تا $t_2 = 10s$

$$= |\Delta x| = \frac{(10 - 6) + (8 - 6)}{2} \times 5 = 15m \Rightarrow |\bar{v}| = \frac{|\Delta x|}{\Delta t} = \frac{15}{4} = 3.75 \frac{m}{s}$$

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به این‌که مساحت محصور بین نمودار شتاب - زمان با محور زمان برابر با تغییرات سرعت است، چون از لحظه‌ی صفر تا لحظه‌ی t_2 ، سطح زیر نمودار شتاب - زمان رو به افزایش است، یعنی Δv افزایش می‌یابد، بنابراین با توجه به این‌که سرعت اولیه‌ی متحرک صفر است، در نتیجه بیش‌ترین سرعت متحرک در لحظه‌ی t_2 است.

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. نمودار سرعت - زمان این حرکت مطابق شکل زیر است. از نمودار پیدا است که در بازه‌ی زمانی صفر تا ۴ ثانیه، حرکت گُندشونده است و اندازه‌ی جابه‌جایی متحرک در این بازه‌ی زمانی با سطح محصور بین نمودار سرعت - زمان و محور زمان برابر است. بنابراین داریم:



$$x = t^2 - 8t + 12 \Rightarrow v = \frac{dx}{dt} = 2t - 8$$

$$|\Delta x| = |S| = \frac{8 \times 4}{2} = 16 \text{ m}$$

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. چون سرعت متحرک با آهنگ یکنواخت کاهش می‌یابد و در مدت ۱۲ ثانیه به صفر می‌رسد، لذا اگر سرعت اولیه را V فرض کنیم بعد از ۶ ثانیه، سرعت برابر $V_1 = \frac{1}{2}V$ خواهد شد. بنابراین سرعت متوسط، در ۶ ثانیه‌ی اول برابر $\bar{V}_1 = \frac{V + \frac{1}{2}V}{2} = \frac{3}{4}V$ و در ۶ ثانیه‌ی دوم برابر $\bar{V}_2 = \frac{\frac{1}{2}V + 0}{2} = \frac{1}{4}V$ می‌شود. جابه‌جایی متحرک در هر مرحله از حرکت برابر است با:

$$\Delta x_1 = \bar{V}_1 \cdot \Delta t_1 = \frac{3}{4}V \times 6 = \frac{9}{2}V, \Delta x_2 = \bar{V}_2 \cdot \Delta t_2 = \frac{1}{4}V \times 6 = \frac{3}{2}V$$

چون حرکت در هر مرحله در یک جهت انجام می‌گیرد، پس مسافت طی شده در هر مرحله برابر اندازه‌ی جابه‌جایی در آن مرحله است.

$$d_1 = |\Delta x_1| = \frac{9}{2}|V| \Rightarrow \frac{d_1}{d_2} = 3$$

$$d_2 = |\Delta x_2| = \frac{3}{2}|V|$$

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. اگر معادله را به صورت $x = -\frac{1}{2}at^2 + V_1t + x_0$ فرض کنیم، ملاحظه می‌شود که $a = -1$ و $V_1 = 1$ است.

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. اگر کل مسافت را Δx و کل زمان را Δt فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \Delta x_1 = \Delta x_2 = \frac{1}{2}\Delta x \\ \Delta t_1 + \Delta t_2 = \Delta t \\ \Delta t_1 = \frac{\Delta x_1}{V_1} = \frac{\frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}} = \frac{\Delta x}{1} \\ \Delta t_2 = \frac{\Delta x_2}{V_2} = \frac{\frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}} = \frac{\Delta x}{1} \end{cases}$$

$$\bar{V} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \bar{V} = \frac{\Delta x}{\Delta t_1 + \Delta t_2} = \frac{\Delta x}{\frac{\Delta x}{1} + \frac{\Delta x}{1}} = \frac{1}{\frac{1}{1} + \frac{1}{1}} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \bar{V} = \frac{48}{2} = 24 \text{ m/s}$$

تذکر: در این نوع سوال‌ها، می‌توان اثبات کرد که:

$$\bar{V} = \frac{2V_1V_2}{V_1 + V_2} \Rightarrow \bar{V} = \frac{2 \times 12 \times 8}{12 + 8} = \frac{192}{20} = 9.6 \text{ m/s}$$

۴۹

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در حرکت یک بُعدی، شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان در هر لحظه برابر با سرعت جسم در آن لحظه می‌باشد. در لحظه $t = ۴s$ ، سرعت جسم برابر با $v_۴ = \frac{۰ - ۱۰}{۴ - ۴} = -۵ \frac{m}{s}$ و در لحظه $t = ۲s$ که شیب خط مماس بر نمودار برابر با صفر است، سرعت نیز صفر است. شتاب متوسط جسم در دو ثانیه‌ی دوم (بازه‌ی زمانی $t_۲ = ۴s$ تا $t_۴ = ۲s$) برابر است با:

$$\bar{a} = \frac{v_۴ - v_۲}{t_۴ - t_۲} = \frac{-۵ - ۰}{۴ - ۲} = -۲/۵ \frac{m}{s^۲} \Rightarrow |\bar{a}| = ۲/۵ \frac{m}{s^۲}$$

۵۰

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. شتاب این متحرک ثابت است. پس سرعت متوسط برابر با میانگین سرعت اولیه و سرعت

$$\frac{V_۱ + V_۲}{۲} = at + V_۱ \Rightarrow \frac{V_۱ + ۱۲a + V_۱}{۲} = at + V_۱ \Rightarrow V_۱ + ۶a = at + V_۱ \Rightarrow t = ۶s$$
 ثانویه است.

۵۱

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به رابطه‌ی مستقل از زمان می‌توان نوشت:

$$|v_x| = \sqrt{۴\Delta x + ۳۶} \Rightarrow v_x^۲ = ۴\Delta x + ۳۶ \Rightarrow v_x^۲ - ۳۶ = ۴\Delta x$$

$$v_x^۲ - v_{x_۰}^۲ = ۲a\Delta x \Rightarrow \begin{cases} v_{x_۰}^۲ = ۳۶ \Rightarrow v_{x_۰} = \frac{\pm ۶m}{s} \\ ۴\Delta x = ۲a\Delta x \Rightarrow a = ۲ \frac{m}{s^۲} \end{cases}$$

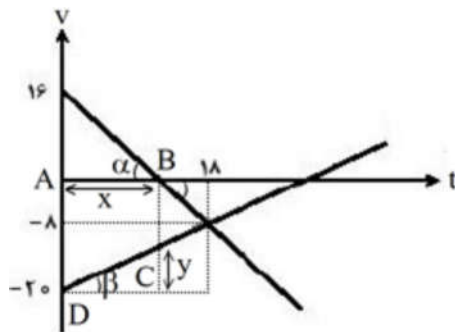
چون متحرک در جهت مثبت محور x در حرکت است پس $v_{x_۰} = ۶ \frac{m}{s}$ دو ثانیه‌ی اول حرکت، بازه‌ی زمانی $t_۱ = ۰$ و $t_۲ = ۲s$

است، حال بنا به رابطه‌ی $\Delta x = \frac{1}{۲}at^۲ + v_{x_۰}t$ داریم:

$$\Delta x = \frac{1}{۲}at^۲ + v_{x_۰}t \xrightarrow[t_۲ = ۶ \frac{m}{s}]{t = ۲s} \Delta x_۲ = \left(\frac{1}{۲} \times ۲ \times ۲^۲ \right) + (۶ \times ۲) = ۱۶m$$

۵۲

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} \Rightarrow \frac{۱۸ - x}{x} = \frac{۱۶}{۸} \Rightarrow x = ۱۲$$

$$\text{tg } \beta = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} \Rightarrow \frac{y}{۱۲} = \frac{۱۲}{۱۸} \Rightarrow y = ۸$$

بزرگی جابه‌جایی متحرک B برابر مساحت ذوزنقه ABCD

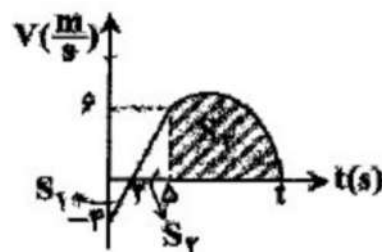
$$|\Delta x_B| = S_{ABCD} = \left(\frac{۱۲ + ۲۰}{۲} \right) \times ۱۲ = ۱۹۲m$$

۵۳

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. سطح زیر نمودار سرعت - زمان برابر جابه‌جایی است:

$$\Delta x = S_1 + S_2 + S_3 = \frac{(-4) \times 2}{2} + \frac{3 \times 6}{2} + 12 \Rightarrow \Delta x = 22m$$

$$\Delta x = x - (-10) \Rightarrow x = 12m$$



۵۴

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{array}{c} \vec{A} \quad \vec{B} \\ \times \quad \times \end{array} \quad X_A = vt \quad X_B = -vt + 300$$

$$(3 \times 60) - (-v(60) + 300) = 300 \Rightarrow v = 7 \frac{m}{s}$$

۵۵

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} \Delta X = (v_{\text{باد}} + v_{\text{کبوتر}}) \times 12 \\ \Delta X = (v_{\text{باد}} - v_{\text{کبوتر}}) \times 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{12} = v_{\text{باد}} + v_{\text{کبوتر}} \\ \frac{x}{20} = v_{\text{باد}} - v_{\text{کبوتر}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{12} + \frac{x}{20} = 2v_{\text{کبوتر}} \Rightarrow \frac{4x}{30} = 2v_{\text{کبوتر}}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 15 \\ v_{\text{کبوتر}} = v \end{array} \right\} \Rightarrow t = 15s$$

۵۶

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. شیب نمودار مکان - زمان در لحظه‌ی $t = 25s$ برابر با صفر است، بنابراین داریم:

$$v = at + v_0 \Rightarrow 0 = 25a + v_0 \Rightarrow v_0 = -25a \quad (1)$$

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$$

با استفاده از معادله‌ی مکان - زمان داریم:

$$\xrightarrow[t_0 = 25s, x_0 = 0]{x_1 = -225m} 0 = \frac{1}{2}a \times 45^2 + (v_0 \times 45) - 225 \xrightarrow{(1)} \frac{1}{2}a \times 45 - 25a - 5 = 0$$

$$\Rightarrow a = -\frac{2m}{s^2} \xrightarrow{(1)} v_0 = -25a = (-25) \times (-2) \Rightarrow v_0 = 50 \frac{m}{s}$$

$$v = at + v_0 \xrightarrow[a = -\frac{2m}{s^2}]{v_0 = 50 \frac{m}{s}} v = -2t + 50$$

۵۷

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در حرکت بر روی یک مسیر مستقیم، متحرک زمانی تغییر جهت می‌دهد که سرعت آن برابر

با صفر و علامت آن عوض شود. بنابراین داریم:

$$x = -t^2 + 2t \Rightarrow v = \frac{dx}{dt} = -2t + 2 \xrightarrow{v=0} t = 1s$$

دقت کنید تا قبل از لحظه‌ی $t = 1s$ ، علامت سرعت مثبت و بعد از آن علامت سرعت منفی است، بنابراین در لحظه‌ی

$t = 1s$ متحرک تغییر جهت می‌دهد. در این لحظه مکان متحرک برابر است با:

$$x = -t^2 + 2t \xrightarrow{t=1s} x = -1^2 + 2 \times 1 \Rightarrow x = 1m$$

با توجه به این‌که متحرک از مبدأ مکان شروع به حرکت کرده است $(x, 0)$ ، بنابراین اندازه‌ی مکان متحرک در لحظه‌ی

تغییر جهت برابر با فاصله‌ی آن از مبدأ حرکت در آن لحظه می‌باشد.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. راه حل اول:

۵۸

$$\begin{cases} x_1 = 5t \\ x_2 = -15t + 20 \end{cases} \Rightarrow |x_2 - x_1| = 20 \Rightarrow \begin{cases} x_2 - x_1 = 20 \Rightarrow 20t - 210 = 20 \Rightarrow t = 11/5s \\ x_1 - x_2 = 20 \Rightarrow -20t + 210 = 20 \Rightarrow t = 9/5s \end{cases}$$

راه حل دوم: با توجه به سرعت نسبی:

نسبی

$$\Delta x = V \Delta t$$

$$210 - 20 = 190 = (5 + 15) \Delta t_1 \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{190}{20} = 9.5s \Rightarrow t_1 = 9/5s$$

$$210 + 20 = 230 = (5 + 15) \Delta t_2 \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{230}{20} = 11.5s \Rightarrow t_2 = 11/5s$$

که با توجه به گزینه‌ها، گزینه‌ی ۱ درست است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۵۹

$$\Delta x = -\frac{1}{2}at^2 + Vt \Rightarrow 192 = -\frac{1}{2}a(8)^2 + 30(8) \Rightarrow 192 = -32a + 240$$

$$\Rightarrow a = 1/5 \frac{m}{s^2}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. زمان رسیدن گلوله‌ی اول به زمین از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

۶۰

$$\Delta y = \frac{1}{2}gt^2 + v.t \Rightarrow 125 = \frac{1}{2} \times 10 \times t^2 \Rightarrow t = 5s$$

حداکثر فاصله‌ی دو گلوله وقتی اتفاق می‌افتد که گلوله‌ی اول به سطح زمین رسیده است. اگر حداکثر فاصله‌ی دو گلوله ۴۵m باشد، گلوله‌ی دوم بایستی ارتفاعی معادل ۸۰m = ۴۵ - ۱۲۵ را طی کرده باشد. مدت زمانی که طول می‌کشد تا گلوله‌ی دوم مسافت ۸۰m را طی کند، برابر است با:

$$\Delta y' = \frac{1}{2}gt'^2 + v.t' \Rightarrow 80 = \frac{1}{2} \times 10 \times t'^2 \Rightarrow t' = 4s$$

بنابراین اختلاف زمان حرکت آن‌ها ۱s = ۵ - ۴ می‌باشد.

۶۱

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. زمان رسیدن گلوله‌ی اول به زمین از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود: (جهت مثبت را بالا در نظر می‌گیریم).

$$\Delta y = -\frac{1}{2}gt^2 + v.t \Rightarrow -125 = -\frac{1}{2} \times 10 \times t^2 \Rightarrow t^2 = 25 \Rightarrow t = 5s$$

حداکثر فاصله‌ی دو گلوله هنگام رسیدن گلوله‌ی اول به زمین اتفاق می‌افتد، بنابراین اگر حداکثر فاصله‌ی دو گلوله از هم ۴۵ متر باشد، گلوله‌ی دوم بایستی ارتفاعی معادل ۸۰ = ۴۵ - ۱۲۵ متر را طی کرده باشد. زمان لازم برای پیمودن این فاصله برابر است با:

$$\Delta y = -\frac{1}{2}gt^2 + v.t \Rightarrow -80 = -\frac{1}{2} \times 10 \times t^2 \Rightarrow t = 4s$$

بنابراین اختلاف زمان حرکت آن‌ها ۱s = ۵ - ۴ می‌باشد.

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. حرکت در ۱۰ ثانیه‌ی نخست دارای شتاب ثابت است و از $t = ۱۰\text{s}$ به بعد سرعت متحرک ثابت است.

$$a = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{۱۵ - (-۱۰)}{۱۰} = \frac{۵}{۲} \frac{m}{s^2}, V_0 = -۱۰ \frac{m}{s}, x_0 = -۱۵m$$

$$x = \frac{1}{2}at^2 + V_0t + x_0 \Rightarrow 0 = \frac{5}{2}t^2 - 10t + 15 \Rightarrow t = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 15 \times \frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}$$

$$t = \frac{5 \pm \sqrt{\frac{25}{2}}}{\frac{5}{2}} = \frac{5 \pm \frac{5}{\sqrt{2}}}{\frac{5}{2}} = 2 \pm \frac{2}{\sqrt{2}} = \begin{cases} 2s \\ 6s \end{cases}$$

از $t = 6\text{s}$ به بعد همواره علامت سرعت (V) مثبت است، یعنی جهت حرکت دیگر تغییر نمی‌کند و متحرک به $x = 0$ باز نخواهد گشت.

$\Delta V = a \cdot \Delta t$: در حرکت با شتاب ثابت

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$V(۱۰) - V(۰) = ۱۰ \times ۱ \Rightarrow V(۱۰) = ۱۰ \frac{m}{s}, V(۱۵) - V(۱۰) = ۵ \times ۲ \Rightarrow V(۱۵) = ۲۰ \frac{m}{s}$$

$$۰ \rightarrow ۱۰: \Delta x = \frac{V(۰) + V(۱۰)}{2} \cdot \Delta t = \frac{۰ + ۱۰}{2} \times ۱۰ = ۵۰m$$

از $t = ۱۵\text{s}$ به بعد سرعت ثابت است.

$$۱۰ \rightarrow ۱۵: \Delta x = \frac{V(۱۰) + V(۱۵)}{2} \cdot \Delta t = \frac{۱۰ + ۲۰}{2} \times ۵ = ۷۵m$$

$$۱۵ \rightarrow ۲۰: \Delta x = V \cdot \Delta t = ۲۰ \times ۵ = ۱۰۰m$$

چون جهت حرکت در تمام این مدت ثابت است، مسافت با اندازه‌ی جابه‌جایی برابر است.

$$d = \Delta x = ۵۰ + ۷۵ + ۱۰۰ = ۲۲۵m$$

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$\bar{V} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{-\frac{1}{2}gt^2 + V_0t}{2/5} = \frac{-5 \times \left(\frac{5}{2}\right)^2}{\frac{5}{2}} = -\frac{25}{2} = -12.5 \frac{m}{s} \Rightarrow |\bar{V}| = 12.5 \frac{m}{s}$$

$$x = \frac{1}{2}at^2 + V_0t + x_0$$

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$x(۰) = ۳۰m, x(۶) = ۰, x(۱) = ۵۰m \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}a \times ۱ + V_0 \times ۱ + ۳۰ = ۵۰ \\ \frac{1}{2}a \times ۳۶ + V_0 \times ۶ + ۳۰ = ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + 2V_0 = ۴۰ \\ 18a + 6V_0 = -۳۰ \end{cases} \Rightarrow 15a = -150 \Rightarrow \begin{cases} a = -10 \frac{m}{s^2} \\ V_0 = 25 \frac{m}{s} \end{cases}$$

تغییر جهت حرکت در زمانی است که سرعت صفر می‌شود و علامت سرعت عوض می‌شود.

$$V^2 - V_0^2 = 2a(x - x_0) \Rightarrow 0 - 25^2 = 2 \times (-10)(x - 30)$$

با توجه به نمودار، متحرک در لحظه‌ای بین $t = ۱\text{s}$ و $t = ۶\text{s}$ توقف کرده و تغییر جهت داده است.

$$x - 30 = \frac{25 \times 25}{20} = 31.25 \Rightarrow x = 61.25m$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در ۵ ثانیه اول، اتومبیل (۱) صد متر از P دور می‌شود.

$$\Delta x = V \cdot \Delta t = 20 \times 5 = 100 \text{ m}$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2} a t^2 + V \cdot t = 3t^2 \\ x_2 &= V \cdot t + x_1 = 10t + 100 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{x_1=x_2} 3t^2 = 20t + 100 \Rightarrow 3t^2 - 20t - 100 = 0$$

$$\Rightarrow t = 10 \text{ s}$$

$$x_2 = 3t^2 = 3 \times 100 = 300 \text{ m}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{aligned} y_A &= -5t^2 \\ y_B &= -5(t-1)^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow y_B - y_A = -5[(t-1)^2 - t^2] = -5(-2t+1)$$

فاصله‌ی دو سنگ: $|y_B - y_A| = 5(2t-1)$

از لحظه‌ی رها شدن B به بعد فاصله‌ی دو سنگ زیاد می‌شود و این وضع ادامه دارد تا زمانی که A به زمین برسد.

$$y_A = -80 \Rightarrow -5t^2 = -80 \Rightarrow t = 4 \text{ s} \Rightarrow |y_B - y_A| = 5(2 \times 4 - 1) = 35 \text{ m}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. شتاب حرکت همواره مثبت است، یعنی سرعت آن پیوسته زیاد می‌شود (نمودار $V-t$ صعودی است.) و چون سرعت اولیه صفر بوده است اندازه‌ی سرعت هم پیوسته زیاد می‌شود (حرکت تندشونده است). جهت سرعت و شتاب ثابت است. (علامت a و V همواره مثبت است) اندازه‌ی شتاب ابتدا کم و سپس زیاد می‌شود.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$t_1 = \frac{v_1}{a} = \frac{30}{2} \text{ s} = 15 \text{ s}$$

اول حساب می‌کنیم که بعد از چند ثانیه به هم می‌رسند.

$$\left\{ \begin{aligned} x_A &= x_B \\ x_{1A} &= x_{2B} \end{aligned} \right. \Rightarrow \Delta x_{1A} + \Delta x_{2A} = \Delta x_B \Rightarrow \frac{1}{2} a t_1^2 + v(t-t_1) = 20t$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \times 2(15)^2 + 30(t-15) = 20t \Rightarrow 225 + 30t - 450 = 20t$$

$$\Rightarrow 10t = 225 \Rightarrow t = 22.5 \text{ s} \Rightarrow \Delta x_A = \Delta x_B = (22.5/5 \times 20) \text{ m} = 45 \text{ m}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. برای متحرکی که با شتاب ثابت در مسیری مستقیم حرکت می‌کند، جابه‌جایی‌ها در T ثانیه‌های متوالی، تشکیل یک دنباله‌ی حسابی با قدر نسبت aT^2 می‌دهد با توجه به خواص دنباله‌ی حسابی، داریم:

$$\Delta x_1 = 60 \text{ m} \quad \text{جمله‌ی اول دنباله}$$

$$\Delta x_2 = 100 \text{ m} \quad \text{جمله‌ی سوم دنباله}$$

$$\Delta x_3 \quad \text{جمله‌ی دوم دنباله}$$

$$\Delta x_n = \frac{\Delta x_{n-1} + \Delta x_{n+1}}{2}$$

$$\Rightarrow \Delta x_2 = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_3}{2} = \frac{60 + 100}{2} = 80 \text{ m}$$

$$\Delta x_1 + \Delta x_2 = 60 + 80 = 140 \text{ m} \quad \text{جابه‌جایی در ثانیه‌ی اول حرکت}$$

۷۱

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در طول مدت زمانی که خطکش را رها کرده و دوباره می‌گیریم، حرکت خطکش سقوط آزاد

$$\Delta y = \frac{1}{2}gh^2 \Rightarrow 4/9 \times 10^{-2} = \frac{1}{2} \times 9/8 t^2 \Rightarrow t^2 = 0/01$$

است، بنابراین داریم:

$$\Rightarrow t = 0/1 s$$

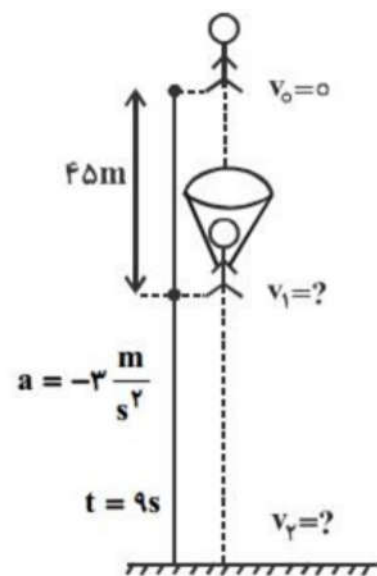
۷۲

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. چتر باز، ۴۵ متر اول مسیر حرکت را با شتاب g و بقیه‌ی مسیر را با شتاب $a = -3 \frac{m}{s^2}$ پیموده است. بنابراین ابتدا با استفاده از رابطه‌ی مستقل از زمان در حرکت با شتاب ثابت سرعتی که چتر باز پس از ۴۵ متر سقوط پیدا می‌کند را به دست می‌آوریم. اگر جهت پایین را مثبت فرض کنیم، می‌توان نوشت:

$$v_1^2 - v_0^2 = 2g\Delta y \Rightarrow v_1^2 - 0 = 2 \times 10 \times 45 \Rightarrow v_1 = 30 \frac{m}{s}$$

با توجه به این که سرعت چتر باز پس از ۴۵ متر سقوط، برابر سرعت اولیه برای قسمت بعدی حرکت با شتاب کندشونده‌ی $3 \frac{m}{s^2}$ است، می‌توان نوشت:

$$v_2 = at + v_1 \xrightarrow[v_1 = 30 \frac{m}{s}]{a = -3 \frac{m}{s^2}} v_2 = -3 \times 9 + 30 \Rightarrow v_2 = 3 \frac{m}{s}$$



۷۳

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

با توجه به نمودار سرعت - زمان، این یک حرکت با شتاب ثابت است.

$$a = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{-20}{5} = -4 \frac{m}{s^2}, v_0 = 20 \frac{m}{s}$$

$$V^2 - V_0^2 = 2a\Delta \cong -24^2 - 20^2 = 2 \times (-4) \Delta x$$

$$\Rightarrow \Delta x = \frac{(24 - 20)(24 + 20)}{-8} = \frac{4 \times 44}{-8} = -22 m \Rightarrow |\Delta x| = 22 m$$

در فاصله ۲۲ متر از نقطه شروع حرکت

$$\begin{cases} x_1 = v_1 t + x_0 \\ x_2 = v_2 t' + x_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_0 = v_1 t + \Delta \Rightarrow t = \frac{v_0}{v_1} \quad (1) \\ v_0 = (v_1 + 3)(t - 1) - 5 \quad (2) \end{cases}$$

$$(1), (2) \Rightarrow v_0 = (v_1 + 3) \left(\frac{v_0}{v_1} - 1 \right) - 5 \Rightarrow v_1^2 + 16v_1 - 36 = 0$$

$$v_1 = \frac{-16 \pm \sqrt{64 + 36}}{2} = -8 \pm 10 \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{s} m \\ -18 \frac{m}{s} \end{cases} \times$$

چون جهت حرکت شخص (۱) در جهت مثبت محور x است، $v_1 = -18 \frac{m}{s}$ قابل قبول نیست.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا معادله‌ی مکان - زمان متحرک را تعیین می‌کنیم: ۷۵

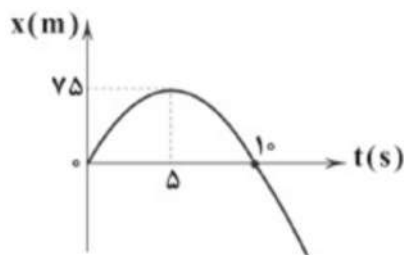
$$x = vt + x_0 \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow[t=5s]{x=12m} 12 = 5v + x_0 \\ \xrightarrow[t=7s]{x=21m} 21 = 7v + x_0 \end{cases} \Rightarrow v = 2 \frac{m}{s}, x_0 = -4m$$

برای تعیین مکان متحرک در لحظه‌ی $t = 10s$ خواهیم داشت:

$$x = vt + x_0 = 2t - 4 \xrightarrow[t=10s]{} x = 16m$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. چون نمودار مکان - زمان سهمی است، شتاب حرکت ثابت است. با توجه به شکل متقارن ۷۶

سهمی، در لحظه‌ی $t = 5s$ و $x = 7.5m$ سرعت متحرک صفر است و جهت حرکت تغییر می‌کند.



$$v = at + v_0 \Rightarrow 0 = 5a + v_0 \Rightarrow v_0 = -5a$$

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \xrightarrow[t=5s]{x_0=0} 7.5 = \frac{1}{2} \times a \times 25 + 5v_0$$

$$\Rightarrow 15 = \frac{5a}{2} + v_0 \xrightarrow[v_0 = -5a]{} 15 = \frac{5a}{2} - 5a \Rightarrow \begin{cases} a = -6 \frac{m}{s^2} \\ v_0 = -5 \times -6 = 30 \frac{m}{s} \end{cases}$$

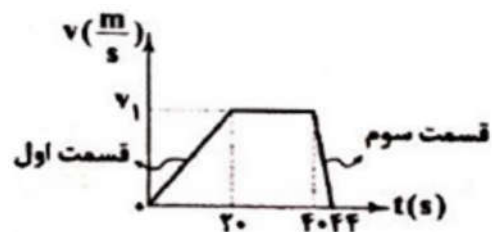
$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 = -3t^2 + 30t \xrightarrow[t=10s]{} x = -3 \times 100 + 30 \times 10 \Rightarrow \Delta x = -225m$$

حال می‌توانیم تندى متوسط آن را محاسبه کنیم:

متحرک ابتدا از $x_0 = 0$ به $x_1 = 7.5m$ رفته و سپس با تغییر جهت حرکت به $x_2 = 0$ بازگشته و در ادامه $x_3 = -225m$ رفته است، بنابراین:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{|\Delta x_1| + |\Delta x_2| + |\Delta x_3|}{\Delta t} = \frac{7.5 + 7.5 + 225}{10} = 23 \frac{m}{s}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نمودار سرعت - زمان اتومبیل را رسم می‌کنیم.



ابتدا باید مدت زمانی که اتومبیل ترمز می‌کند را محاسبه کنیم.

$$\begin{cases} \text{در قسمت اول } v_1 = a_1 t + v_0 \xrightarrow{t=20s} v_1 = 20a + 0 \\ \text{در قسمت سوم } v_2 = a_2 t' + v_1 \Rightarrow 0 = (-5a)t' + 20a \Rightarrow t' = 4s \end{cases}$$

مساحت زیر نمودار سرعت - زمان نشان‌دهنده‌ی جابه‌جایی است، بنابراین:

$$S = \frac{44 + 20}{2} \times v_1 = 1280 \Rightarrow v_1 = 40 \frac{m}{s}$$

$$v_1 = at + v_0 \Rightarrow 40 = 20a + 0 \Rightarrow a = 2 \frac{m}{s^2}$$

اکنون اندازه‌ی شتاب a را محاسبه می‌کنیم.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

اگر سرعت در ۳ ثانیه قبل از توقف را v_0 در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$v = at + v_0 \Rightarrow 0 = -5 \times 3 + v_0 \Rightarrow v_0 = 15 \frac{m}{s}$$

$$v_{av} = \frac{v + v_0}{2} = \left(\frac{0 + 15}{2} \right) \frac{m}{s} = 7.5 \frac{m}{s}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

اگر جهت مثبت به طرف بالا و سطح زمین مبدا مکان اختیار شود، خواهیم داشت:

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 t + y_0 \xrightarrow{V_0=0} \begin{cases} h_1 = -5t^2 + h \\ h_2 = -5(t+2)^2 + h \end{cases} \Rightarrow h_1 = h_2 = 20t + 20$$

بنابراین نتیجه می‌شود که اختلاف h_1 و h_2 به t بستگی دارد.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به این که در ۵ ثانیه اول، سرعت ثانویه از سرعت اولیه کمتر است، پس شتاب متوسط در ۵ ثانیه اول منفی است، یعنی:

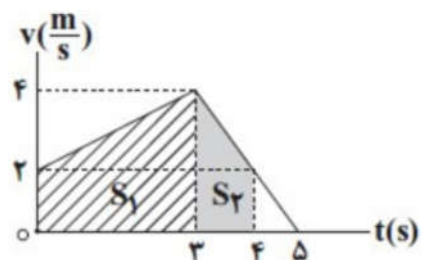
$$a_{av} = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} \Rightarrow \frac{-4}{10} = \frac{0 - v_1}{5} \Rightarrow v_1 = 2 \frac{m}{s}$$

حال باید سرعت را در لحظه $t = 4s$ بیابیم، با توجه به این که در بازه $t = 3s$ تا $t = 5s$ حرکت با شتاب ثابت $-2 \frac{m}{s^2}$ است.

$$\text{داریم: } \left(a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0 - 4}{5 - 3} = -2 \frac{m}{s^2} \right)$$

$$(t_1 = 3s, t_2 = 5s) \quad v = at + v_0 \xrightarrow{v_0 = 4 \frac{m}{s}, a = -2 \frac{m}{s^2}, t = 1s} v = (-2 \times 1) + 4 = 2 \frac{m}{s}$$

مساحت زیر نمودار $(v-t)$ در بازه $(0, 4s)$ جابه‌جایی متحرک را در این بازه به ما می‌دهد.



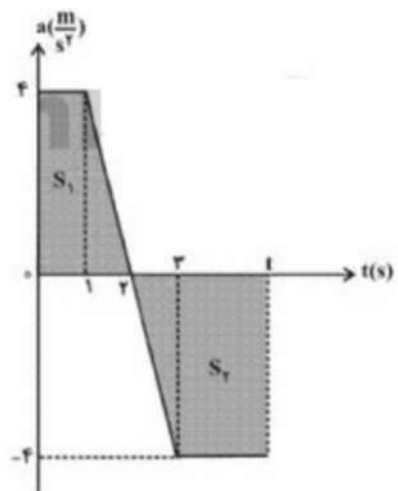
$$S_1 = \frac{(4+2) \times 3}{2} = 9m, S_2 = \frac{(2+4) \times 1}{2} = 3m$$

$$\Rightarrow v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta x = S_1 + S_2} v_{av} = \frac{12}{4} = 3 \frac{m}{s}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. می‌دانیم سطح زیر نمودار شتاب - زمان با محور زمان برابر با تغییرات سرعت در بازه‌ی زمانی مربوطه می‌باشد. اگر این سطح بالای محور زمان باشد، سرعت متحرک افزایش می‌یابد و اگر پایین محور زمان باشد، سرعت متحرک کاهش می‌یابد. بنابراین سرعت این متحرک تا $t = 2s$ افزایش و از آن به بعد کاهش می‌یابد. بنابراین تغییر سرعت تا لحظه‌ی t برابر است با:

$$\Delta v = v - v_0 = S_1 - S_2 \Rightarrow 0 - 4 = \frac{(2+1)}{2} \times 4 - \frac{(t-2) + (t-3)}{2} \times 4$$

$$\Rightarrow 20 = 4t \Rightarrow t = 5s$$



گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

چون حرکت روی خط راست و با شتاب ثابت انجام گرفته است، خواهیم داشت:

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow v^2 - 100 = 2(2)(200) \Rightarrow v = 30 \frac{m}{s}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. برای این که حرکت تندشونده باشد، شتاب و سرعت متحرک باید هم علامت باشند. در این تست شتاب مثبت است ($a = 4 > 0$)، پس سرعت اولیه‌ی آن هم باید مثبت باشد ($v_0 \geq 0$) تا حرکت تندشونده باشد. از تندشونده بودن حرکت پیدا است که متحرک تغییر جهت نمی‌دهد، بنابراین مسافت طی شده با جابه‌جایی برابر است. حال سرعت‌ها را در لحظه‌های $t = 4s$ و $t = 12s$ محاسبه می‌کنیم:

$$\left. \begin{aligned} t = 4s &\Rightarrow v = 16 + v_0 \\ t = 8s &\Rightarrow v = 32 + v_0 \\ t = 12s &\Rightarrow v = 48 + v_0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta x = \frac{v_0 + v}{2} \times t$$

$$\Delta x = \frac{16 + v_0 + v_0}{2} \times 4 = 32 + 4v_0$$

$$(t = 12s \text{ تا } t = 8s) \Delta x = \frac{48 + v_0 + 32 + v_0}{2} \times 4 = 160 + 4v_0$$

$$\frac{\Delta x_{8-12}}{\Delta x_{0-8}} = \frac{39}{23} \Rightarrow \frac{160 + 4v_0}{32 + 4v_0} = \frac{39}{23} \Rightarrow \frac{40 + v_0}{8 + v_0} = \frac{39}{23} \Rightarrow 23 \times 40 + 23v_0 = 39 \times 8 + 39v_0$$

$$\Rightarrow v_0 = 38 \frac{m}{s}$$

$$v = 4t + 38 \Rightarrow v = 4 \times 4 / 5 + 38 = 56 \frac{m}{s}$$

حال سرعت در لحظه‌ی $t = 4/5s$ را محاسبه می‌کنیم:

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با استفاده از معادله حرکت جسم، داریم:

$$\left\{ \begin{aligned} t_1 = 0 &\Rightarrow x_1 = 0 \\ t_2 = 2s &\Rightarrow x_2 = \left[2(2)^2 - 6(2) + 12(2) \right] m = 16m \end{aligned} \right.$$

$$V_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \left(\frac{16}{2} \right) \frac{m}{s} = 8 \frac{m}{s}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. شتاب در بازه تا $12s$ ثابت است.

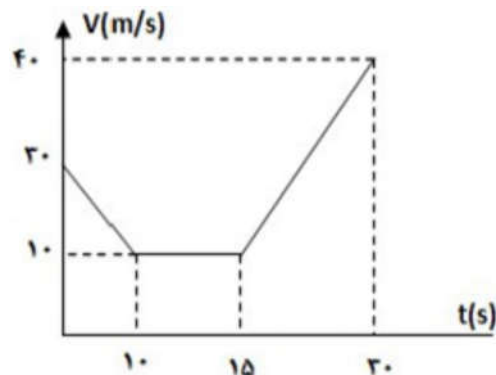
$$\left\{ \begin{aligned} a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{14}{4} = 3.5 \frac{m}{s^2} &\Rightarrow v = at + v_0 = 2(2) + (-10) = -6 \frac{m}{s} \\ v_0 = -10 \frac{m}{s} \end{aligned} \right.$$

شتاب در بازه‌ی $12s$ تا $20s$ نیز ثابت است.

$$a_{av} = -\frac{14}{8} = -1.75 \frac{m}{s^2}$$

$$(12s \text{ تا } 20s) a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{7 - (-6)}{8} = 1.625 \frac{m}{s^2}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به این که می‌دانیم سطح زیر نمودار سرعت - زمان برابر جابه‌جایی می‌باشد داریم:



$$\begin{aligned} t = 0 &\Rightarrow V = 30 \frac{m}{s} \\ t = 0 - 10 &\Rightarrow \Delta V = -20 = V_1 - 30 \Rightarrow t = 10 \\ &\Rightarrow V = 10 \frac{m}{s} \\ t = 10 - 15 &\Rightarrow V = \text{const} = 10 \frac{m}{s} \\ t = 15 - 30 &\Rightarrow \Delta V = 30 = V_2 - 10 \\ &\Rightarrow t = 30 \Rightarrow V = 40 \frac{m}{s} \end{aligned}$$

با مساحت‌گیری زیر نمودار سرعت زمان و رابطه سرعت متوسط داریم:

$$\bar{V} = \frac{(5 \times 10) + \left(\frac{10+40}{2} \right) \times 15}{30 - 10} = 21.25 \frac{m}{s}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چون شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان متحرک، در تمام لحظه‌های حرکت آن یکسان است، نتیجه می‌شود که متحرک با سرعت ثابت روی محور X حرکت می‌کند، پس سرعت آن در هر لحظه برابر سرعت متوسط آن در هر بازه زمانی دلخواه می‌باشد.
بنابراین خواهیم داشت:

$$V = V_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \left(\frac{-20 - 80}{5 - 0} \right) \frac{m}{s} = -20 \frac{m}{s}$$

$$x = vt + x_0 \Rightarrow 0 = -20t + 80 \Rightarrow t = 4s$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با استفاده از معادله سرعت - جابه‌جایی، در حرکت با شتاب ثابت، داریم:

$$v_2^2 = v_1^2 + 2a\Delta x \Rightarrow 0^2 = 8^2 + 2a(50 - 18) \Rightarrow a = -1 \frac{m}{s^2}$$

$$v_2^2 = v_1^2 + 2a\Delta x' \Rightarrow 0^2 = v_1^2 + 2 \times (-1)(50 - 0) \Rightarrow v_1 = 10 \frac{m}{s}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به نمودار مکان - زمان متحرک، در لحظه‌ی $t = 4s$ ، خط مماس بر نمودار افقی شده و سرعت متحرک در این لحظه برابر صفر است. پس ابتدا با استفاده از نمودار، سرعت اولیه و شتاب متحرک را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta x = \frac{v + v_0}{2} \times \Delta t \Rightarrow 54 - 30 = \frac{0 + v_0}{2} \times 4 \Rightarrow v_0 = 12 \frac{m}{s}$$

$$v = at + v_0 \Rightarrow 0 = a \times 4 + 12 \Rightarrow a = -3 \frac{m}{s^2}$$

برای تعیین سرعت در لحظه‌ی عبور از مبدأ از معادله‌ی سرعت - جابه‌جایی در حرکت با شتاب ثابت، بین لحظه‌ی توقف و عبور از مبدأ استفاده می‌کنیم:

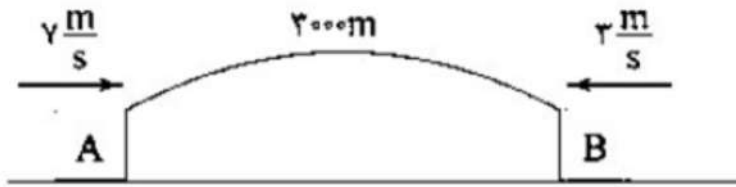
$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow v^2 - 0 = 2 \times (-3)(-54) \Rightarrow v = 18 \frac{m}{s}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. شرط این‌که تندی متوسط با اندازه‌ی سرعت متوسط در یک بازه‌ی زمانی برابر نباشند، این است که جابه‌جایی و مسافت طی‌شده توسط متحرک با یکدیگر برابر نباشند و این در شرایطی رخ می‌دهد که متحرک در بازه‌ی زمانی مورد نظر متوقف شده و تغییر جهت دهد. پس گزینه‌ی درست گزینه‌ای است که یکی از لحظات توقف و تغییر جهت حرکت درون بازه باشد.

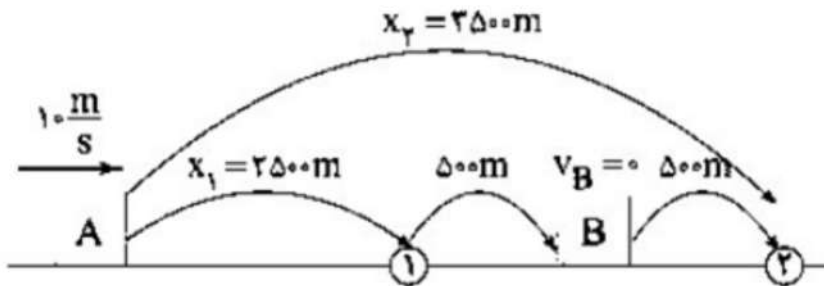
$$v = t^2 - 6t + 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 1s \\ t_2 = 5s \end{cases}$$

علامت سرعت تا قبل از لحظه‌ی $t_1 = 1s$ و بعد از لحظه‌ی $t_2 = 5s$ مثبت است و در بازه‌ی زمانی $t_1 = 1s$ تا $t_2 = 5s$ منفی است. بنابراین متحرک در لحظات $t_1 = 1s$ و $t_2 = 5s$ جهت حرکت خود را تغییر داده است.
لحظه‌ی $t = 5s$ درون بازه‌ی ۳ ثانیه‌ی دوم $([3, 6])$ قرار دارد.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در دو لحظه دو اتومبیل در فاصله‌ی ۵۰۰ متری نسبت به هم قرار دارند، یکی قبل از رسیدن دو اتومبیل به هم و دیگری بعد از آن.
با استفاده از مفهوم سرعت نسبی خواهیم داشت:



$$v_{\text{نسبی}} = v_A + v_B = 7 + 3 = \frac{10 \text{ m}}{\text{s}}$$



$$x_1 = v_{\text{نسبی}} t_1 \Rightarrow 250 = 10 t_1 \Rightarrow t_1 = 25 \text{ s}$$

$$x_2 = v_{\text{نسبی}} t_2 \Rightarrow 250 = 10 t_2 \Rightarrow t_2 = 25 \text{ s}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به نمودار، متحرک در لحظه $t = 2 \text{ s}$ تغییر جهت داده است. بنابراین برای محاسبه مسافت طی شده باید بازه زمانی صفر تا ۴ s را به دو بازه زمانی صفر تا ۲ s و ۲ s تا ۴ s تقسیم کنیم و جابه‌جایی در هر بازه زمانی را محاسبه کرده و سپس اندازه آن‌ها را با هم جمع کنیم. داریم:

$$\left. \begin{array}{l} t_1 = 0 : x_1 = -10 \text{ m} \\ t_2 = 2 \text{ s} : x_2 = 30 \text{ m} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta x_1 = x_2 - x_1 = 30 - (-10) = 40 \text{ m}$$

$$\left. \begin{array}{l} t_3 = 2 \text{ s} : x_3 = 30 \text{ m} \\ t_4 = 4 \text{ s} : x_4 = -30 \text{ m} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta x_2 = x_4 - x_3 = -30 - 30 = -60 \text{ m}$$

بنابراین مسافت طی شده برابر است با:

$$I = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| = 40 + |-60| = 100 \text{ m}$$

برای محاسبه جابه‌جایی داریم:

$$\left. \begin{array}{l} t_1 = 0 : x_1 = -10 \text{ m} \\ t_2 = 4 \text{ s} : x_2 = -30 \text{ m} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta x = x_2 - x_1 = -30 - (-10) = -20 \text{ m} \Rightarrow |\Delta x| = 20 \text{ m}$$

$$\frac{I}{|\Delta x|} = \frac{100}{20} = 5$$

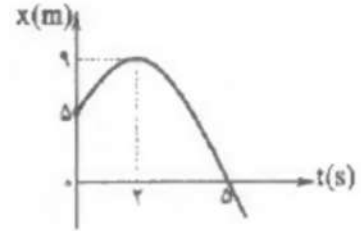
در نهایت نسبت مسافت به اندازه بردار جابه‌جایی متحرک برابر است با:

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا به کمک معادله سرعت - زمان اندازه شتاب و سرعت اولیه متحرک را به دست می آوریم:

$$\left. \begin{aligned} v &= -2t + 4 \\ v &= at + v_0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = -2 \frac{m}{s^2} \quad v_0 = 4 \frac{m}{s}$$

در ادامه معادله مکان - زمان حرکت را به دست آورده و به کمک آن نمودار مکان - زمان حرکت را رسم می کنیم.

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 = -t^2 + 4t + 5$$



با توجه به نمودار رسم شده مطالب بیان شده در گزینه های (۱)، (۲) و (۴) درست هستند. اما مطلب بیان شده در گزینه (۳) نادرست است و متحرک در لحظه $t = 5s$ از مبدأ مکان عبور می کند.

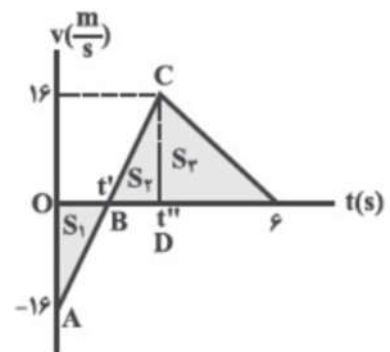
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. سرعت متوسط از رابطه $v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ به دست می آید که Δx برای هر سه متحرک یکسان است ولی Δt برای متحرک C کمترین است زیرا کمترین مسافت را با تندی ثابت و یکسان می پیماید (دقت کنید کمترین فاصله دو نقطه خط راستی است که این دو نقطه را به هم وصل می کند). بنابراین $(v_{av})_C$ بیش تر از $(v_{av})_A$ و $(v_{av})_B$ است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. چون ارتفاع دو مثلث OAB و BCD با یکدیگر برابر است $S_1 = S_2$ ، لذا جابه جایی متحرک در این بازه زمانی صفر است. جابه جایی کل متحرک برابر است با:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow 4 = \frac{\frac{(4-t') \times 16}{2}}{4} \Rightarrow t' = 3s \Rightarrow t' = 1/5s$$

بنابراین مسافت طی شده توسط متحرک برابر است با:

$$l = |S_1| + |S_2| + |S_3| = \left| \frac{1/5 \times (-16)}{2} \right| + \left| \frac{1/5 \times 16}{2} \right| + \left| \frac{3 \times 16}{2} \right| \Rightarrow l = 12 + 12 + 24 = 48m$$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر مکان جسم در $t = ۵s$ را x بنامیم، مسافت طی شده در بازه‌ی زمانی صفر تا $۱۰s$ (در

لحظه‌ای که متحرک دوباره در مبدأ مکان قرار دارد) معادل $|x|$ خواهد بود. از طرفی:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow ۱/۴ = \frac{۲|x|}{۱۰} \Rightarrow |x| = ۵m \Rightarrow x_{(t=۵s)} = -۵m$$

از طرفی در بازه‌ی زمانی $۵s$ تا $۱۴s$ می‌توان نوشت:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow ۲ = \frac{x_{(t=۱۴s)} - x_{(t=۵s)}}{۱۴ - ۵} \Rightarrow ۲ = \frac{x_{(t=۱۴s)} - (-۵)}{۹} \Rightarrow x_{۱۴} = ۱۱m \Rightarrow \vec{d}_{(t=۱۴s)} = +۱۱\vec{i}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مبدأ حرکت یعنی $+۵m$. x متحرک در $t = ۱۱s$ در بیشترین فاصله از مبدأ حرکت خود قرار دارد. در این مدت $۳۵m$ مسافت طی کرده است و در سه لحظه $t_۱ = ۱s$, $t_۲ = ۳s$ و $t_۳ = ۹s$ جهت بردار مکان آن تغییر کرده است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

ثانیه دوم یعنی از $t_۱ = ۱s$ تا $t_۲ = ۳s$ با توجه به رابطه

ثانیه دوم یعنی از $t_۱ = ۱s$ تا $t_۲ = ۳s$ با توجه به رابطه $v_{av} = \frac{x_۲ - x_۱}{t_۲ - t_۱}$ ، برای تعیین سرعت متوسط کافی است که $x(۱)$

و $x(۲)$ را به دست بیاوریم و در رابطه قرار دهیم:

$$\begin{cases} x(۲) = ۲(۲)^۳ - ۶(۲)^۲ + ۴(۲) + ۵ = ۵m \\ x(۱) = ۲(۱)^۳ - ۶(۱)^۲ + ۴(۱) + ۵ = ۵m \end{cases} \rightarrow v_{av} = \frac{۵ - ۵}{۲ - ۱} = ۰$$

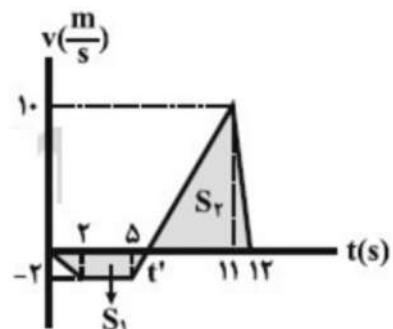
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. به طور منفی برای نمودار $a - t$ نشان داده شده، شتاب متوسط در هر بازه زمانی از کمترین مقدار شتاب در آن بازه بیشتر است و از بیشترین مقدار شتاب در آن بازه کمتر است.

اگر شتاب در لحظه‌های $t_۱$ و $t_۲$ را به ترتیب $a_۱$ و $a_۲$ بدانیم شتاب متوسط در بازه $t_۱$ تا $t_۲$ از $a_۱$ بیشتر است، شتاب

متوسط در بازه $t_۱$ تا $t_۲$ از $a_۱$ کمتر است و شتاب متوسط در بازه $t_۲$ تا $t_۳$ از $a_۲$ کمتر است. با توجه به این که $a_۲ < a_۱$ است، شتاب متوسط در بازه زمانی $t_۲$ تا $t_۳$ از بقیه بازه‌ها کمتر است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. چون در لحظه t' سرعت متحرک صفر می‌شود و علامت آن عوض می‌شود پس در این لحظه متحرک تغییر جهت می‌دهد. ابتدا با استفاده از تشابه مثلث‌ها، لحظه‌ای که سرعت صفر می‌شود (t') را می‌یابیم:

$$\frac{2}{t' - 5} = \frac{10}{11 - t'} \Rightarrow t' = 6s$$



با توجه این‌که مساحت بین نمودار سرعت - زمان برابر با جابه‌جایی متحرک است، جابه‌جایی‌های متحرک در بازه‌های صفر تا ۶s تا ۱۲s را می‌یابیم، داریم:

$$S_1 = \frac{6+3}{2} \times 2 \Rightarrow S_1 = 9m \Rightarrow \Delta x_1 = -9m$$

$$S_2 = \frac{6 \times 10}{2} \Rightarrow S_2 = 30m \Rightarrow \Delta x_2 = 30m$$

متحرک در لحظه $t = 0$ در مکان $x_0 = -8m$ قرار دارد.

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0 \Rightarrow -9 = x_1 - (-8) \Rightarrow x_1 = -17m$$

مکان متحرک در لحظه $t' = 6s$ برابر است با:

$$\Delta x_2 = x_2 - x_1 \Rightarrow 30 = x_2 - (-17) \Rightarrow x_2 = 13m$$

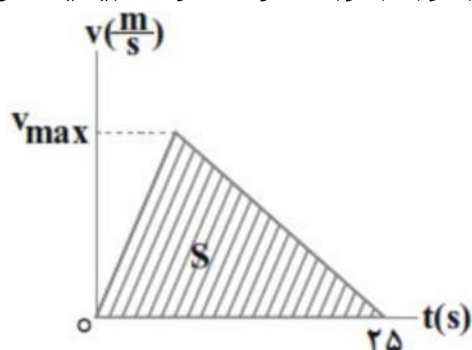
مکان متحرک در لحظه $t = 12s$ برابر است با:

پس در بازه زمانی مشخص شده، در لحظه $t' = 6s$ متحرک در بیش‌ترین فاصله از مبدأ مکان قرار دارد.

$$(|x_1 = 17m|)$$

گزینه ۱ پاسخ سوال است. مساحت محصور بین نمودار سرعت - زمان و محور زمان در هر بازه زمانی برابر با اندازه جابه‌جایی در آن بازه است.

با توجه به رابطه سرعت متوسط، بیشینه سرعت (V_{max}) را به دست می‌آوریم:



$$S = \Delta x = \frac{V_{max} \times 25}{2}, V_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{V_{max} \times 25}{2 \times 25} = \frac{V_{max}}{2}$$

$$\Rightarrow 10 = \frac{V_{max}}{2} \Rightarrow V_{max} = 20 \frac{m}{s}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مطابق نمودار در لحظه t متحرک B از متحرک A سبقت می‌گیرد. شیب نمودار مکان - زمان برای هر دو متحرک A و B در لحظه $t = 0$ برابر صفر است، پس سرعت اولیه دو متحرک برابر صفر است. با استفاده از رابطه مکان - زمان در حرکت با شتاب ثابت داریم:

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \begin{cases} \xrightarrow[v_{0,A}=0]{\Delta x_A=7.5m} 7.5 = \frac{1}{2}a_A t^2 \quad (1) \\ \xrightarrow[v_{0,B}=0]{\Delta x_B=7.5-(-7.5)=15m} 15.0 = \frac{1}{2}a_B t^2 \quad (2) \end{cases}$$

$$(1), (2) \Rightarrow \frac{15.0}{7.5} = \frac{\frac{1}{2}a_B t^2}{\frac{1}{2}a_A t^2} \Rightarrow 2 = \frac{a_B}{a_A} \quad (3)$$

مطابق معادله سرعت - زمان در حرکت با شتاب ثابت داریم:

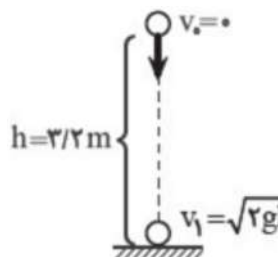
$$v = at + v_0 \begin{cases} \xrightarrow[v_{0,A}=0]{v_{0,A}=0} v_A = a_A t \quad (4) \\ \xrightarrow[v_{0,B}=0]{v_{0,B}=0} v_B = a_B t \quad (5) \end{cases}$$

$$(4), (5) \Rightarrow \frac{v_B}{v_A} = \frac{a_B t}{a_A t} = \frac{a_B}{a_A} \xrightarrow{(3)} \frac{v_B}{v_A} = 2$$

راه دوم: با استفاده از رابطه مستقل از شتاب در حرکت با شتاب ثابت داریم:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{v_1 + v_2}{2} \begin{cases} \xrightarrow[v_{0,A}=0]{\Delta x_A=7.5m} \frac{7.5}{\Delta t_A} = \frac{0+v_A}{2} \\ \xrightarrow[v_{0,B}=0]{\Delta x_B=15m} \frac{15.0}{\Delta t_B} = \frac{0+v_B}{2} \end{cases} \xrightarrow{\Delta t_A=\Delta t_B} \frac{v_B}{v_A} = 2$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در حالتی که توپ سقوط می‌کند، با استفاده از اصل پایستگی انرژی مکانیکی، سرعت برخورد توپ به زمین را می‌یابیم:

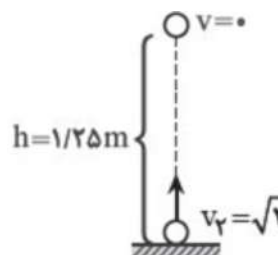


$$E_1 = E_2 \Rightarrow mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{2gh}$$

$$v_1 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 10 \times 3/2} \Rightarrow v_1 = 4 \text{ m/s}$$

در حالتی که توپ به بالا برمی‌گردد، مشابه حالت قبل با استفاده از پایستگی انرژی مکانیکی سرعت توپ را هنگام جدا شدن از زمین به صورت زیر می‌یابیم:



$$v_2 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 10 \times 1/25} \Rightarrow v_2 = 0.4 \text{ m/s}$$

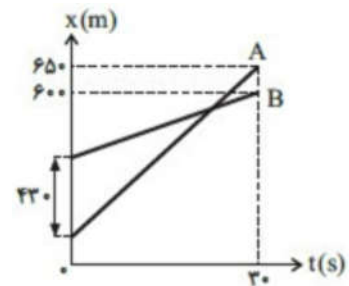
حال برای تعیین شتاب متوسط، با توجه به تعریف آن داریم: (اگر جهت روبه بالا را مثبت بگیریم)

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} \quad v_2 = 0.4 \text{ m/s} \text{ و } v_1 = -4 \text{ m/s} \quad \Delta t = 12 \times 10^{-2} \text{ s} \quad \Rightarrow a_{av} = \frac{0.4 - (-4)}{12 \times 10^{-2}} \Rightarrow a_{av} = 1000 \text{ m/s}^2$$

و جهت آن همسو با بردار $\vec{\Delta v}$ یعنی در اینجا رو به بالا است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نمودارها مربوط به حرکت با سرعت ثابت است و معادله حرکت آنها به صورت $x = vt + x_0$ است.

حال در لحظه $t = 30\text{ s}$ داریم:



برای متحرک A: $x_A = v_A t + x_{A,0} \xrightarrow{t=30\text{ s}} 60 = 30v_A + 30 \quad (1)$

برای متحرک B: $x_B = v_B t + x_{B,0} \xrightarrow{t=30\text{ s}} 30 = 30v_B + 60 \quad (2)$

اگر دو معادله را از هم کم کنیم، خواهیم داشت: $(1) - (2) \Rightarrow 30(v_A - v_B) + (x_{A,0} - x_{B,0}) = 30$

با توجه به شکل داریم: $x_{A,0} - x_{B,0} = -30\text{ m}$ بنابراین خواهیم داشت:

$$30(v_A - v_B) - 30 = 30 \Rightarrow 30(v_A - v_B) = 60 \Rightarrow v_A - v_B = 2\text{ m/s}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. بررسی عبارت‌ها:

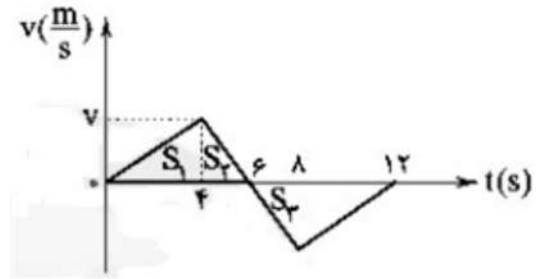
الف) نادرست است. این متحرک در لحظات ۲، ۴، ۷ و ۹ ثانیه تغییر جهت می‌دهد. بنابراین در بازه ثانیه‌ی اول حرکت این متحرک ۴ بار تغییر جهت می‌دهد.

ب) درست است. متحرک در بازه‌های زمانی ۲s تا ۴s و ۷s تا ۹s به مدت ۴ ثانیه در خلاف جهت محور x حرکت کرده است.

ج) درست است. در بازه‌های زمانی صفر تا ۲s، ۴s تا ۷s و ۸s تا ۹s به مدت ۶ ثانیه متحرک در حال دور شدن از مبدأ مکان بوده است.

د) نادرست است. بردار مکان این متحرک به مدت ۲s در بازه‌ی زمانی ۸s تا ۱۱s در خلاف جهت محور مکان می‌باشد.

گام اول: مطابق شکل زیر فرض می‌کنیم، بیشینه‌ی تندی حرکت متحرک در ۶ ثانیه‌ی اول حرکت برابر v باشد، در این صورت داریم:



$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{S_1 + S_2}{\Delta t} = \frac{\left(\frac{v \times 6}{2}\right)}{6} = \frac{v}{2} \xrightarrow{v_{av}=10 \frac{m}{s}} 10 = \frac{v}{2} \Rightarrow v = 20 \frac{m}{s}$$

گام دوم: با مشخص شدن مقدار v مقدار S_2 را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$S_2 = \frac{20 \times 6}{2} = 60 \text{ m}$$

گام سوم: با توجه به این‌که مثلث‌های S_1 و S_2 مشابه هستند، مساحت آن‌ها با یک‌دیگر برابر است و همان‌طور که می‌دانید مساحت محصور بین نمودار سرعت - زمان و محور زمان برابر مسافت طی‌شده توسط متحرک در آن بازه‌ی زمانی می‌باشد، بنابراین مسافت طی‌شده در چهار ثانیه‌ی دوم حرکت برابر است با:

$$l = S_1 + S_2 = 20 + 60 = 80 \text{ m}$$

گام آخر: و در نهایت تندی متوسط حرکت متحرک در چهار ثانیه‌ی دوم حرکت به صورت زیر به دست می‌آید:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{80}{4} = 20 \frac{m}{s}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. متحرک از لحظه t' تا ۲۵ در جهت خلاف محور x حرکت کرده که جابه‌جایی آن:

$$|\Delta x| = S = \frac{(25 - t') \times 15}{2}$$

$$V_{av} = \frac{|\Delta x|}{\Delta t} = \frac{\frac{(25 - t') \times 15}{2}}{(25 - t')} \Rightarrow V_{av} = \frac{15}{2} = 7.5 \text{ m/s}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نمودار $x - t$ یک حرکت با سرعت ثابت به صورت یک خط راست شیب‌دار است. در حرکت با سرعت ثابت $\Delta x = v \Delta t$ است:

$$\Delta x' = \Delta x = \frac{\Delta t'}{\Delta t} \rightarrow \frac{\Delta x'}{+6} = \frac{2}{3} \rightarrow \Delta x' = +4 \text{ m}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا سرعت متوسط (v_{av}) را با توجه به رابطه‌ی آن محاسبه می‌کنیم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-۱۰ - ۵}{t' - ۰} = -\frac{۱۵}{t'} \frac{m}{s}$$

با توجه به افقی بودن نمودار (شیب صفر) در لحظه‌ی $t = ۰$ ، سرعت اولیه‌ی متحرک برابر با صفر است.

سرعت متحرک در لحظه‌ی t' برابر با شیب خط مماس به آن در لحظه‌ی t' است،

لذا داریم:

$$v(t') = \text{شیب خط مماس} = \frac{-۱۰ - ۵}{t' - ۰} = -\frac{۱۵}{t'} \frac{m}{s}$$

در نتیجه برای شتاب متوسط متحرک از ابتدای حرکت تا لحظه‌ی t' خواهیم داشت:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t') - v_0}{t' - ۰} = \frac{-\frac{۱۵}{t'} - ۰}{t'} = -\frac{۱۵}{t'^2} \frac{m}{s^2}$$

$$\frac{v_{av}}{a_{av}} = \frac{\frac{۱۵}{t'}}{-\frac{۱۵}{t'^2}} = t'$$

بنابراین:

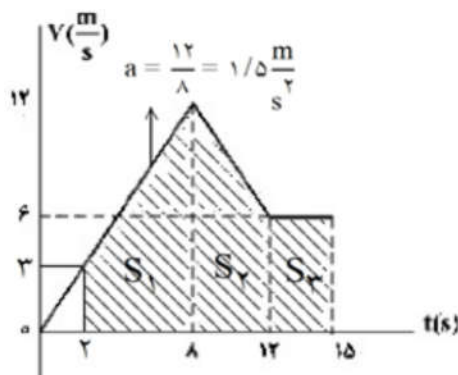
گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با صفر قرار دادن v در روابط سرعت - زمان و سرعت - جابه‌جایی (مستقل از زمان) یک حرکت

$$t_s = -\frac{v_0}{a} \Rightarrow t_s = -\frac{۱۲}{-۱/۵} = ۸s$$

با شتاب ثابت، داریم:

$$\Delta x_s = -\frac{v_0^2}{2a} \Rightarrow \Delta x_s = -\frac{۱۲^2}{2(-۱/۵)} = ۳۶m$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



$$S_1 = \frac{۱۲+۰}{2} \times ۲ = ۱۲$$

$$S_2 = \frac{۱۲+۶}{2} \times ۴ = ۳۶$$

$$S_3 = ۳ \times ۶ = ۱۸$$

$$\text{کل } \Delta x = ۱۲ + ۳۶ + ۱۸$$

$$\Delta x = ۶۶m$$

$$x_2 - x_1 = \Delta x \Rightarrow x_2 = \Delta x + x_1$$

$$x_2 = ۶۶ - ۶ = ۶۰m$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. $\frac{1}{3}$ طول مسیر با سرعت ثابت $\frac{m}{s}$ و $\frac{2}{3}$ آن با سرعت ثابت $\frac{m}{s}$ طی شده است، لذا برای

محاسبه‌ی سرعت متوسط متحرک در کل مسیر داریم:

$$\Delta x_1 = \frac{1}{3} x_{\text{کل}} \quad \Delta x_2 = \frac{2}{3} x_{\text{کل}}$$

$$v_{\text{av}} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{\Delta t_1 + \Delta t_2} \Rightarrow v_{\text{av}} = \frac{\frac{1}{3} x_{\text{کل}} + \frac{2}{3} x_{\text{کل}}}{\Delta t_1 + \Delta t_2}$$

$$\frac{\Delta t_1 = \frac{\Delta x_1}{v_1}}{\Delta t_2 = \frac{\Delta x_2}{v_2}} \Rightarrow v_{\text{av}} = \frac{\frac{1}{3} x_{\text{کل}} + \frac{2}{3} x_{\text{کل}}}{\frac{1}{3} \frac{x_{\text{کل}}}{6} + \frac{2}{3} \frac{x_{\text{کل}}}{12}} = 9 \frac{m}{s}$$

حال مسافت طی‌شده را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta x_{AB} = v_{\text{av}} \Delta t = 9 \times 10 = 90 \text{ m}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا سرعت را در $5s$ حرکت حساب می‌کنیم:

$$v_{\text{av}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{18 - (-2)}{5} = 4 \frac{m}{s}$$

در حرکت با سرعت ثابت، سرعت متوسط در هر بازه زمانی دلخواه با سرعت لحظه‌ای مساوی است:

$$v_{\text{av}} = v = 4 \frac{m}{s}$$

$$x = vt + x_0 \Rightarrow x = 4t + x_0 \xrightarrow{t=1s} x = 4 \times 1 + x_0 = -2 \Rightarrow x_0 = -6 \text{ m}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در ۲ ثانیه اول حرکت، متحرک به صورت شتاب ثابت در حال حرکت است:

$$\Delta x_1 = 2^2 + 4 \times 2 = 12 \text{ m}$$

پس از آن و با حذف تنها نیروی وارد بر آن، جسم با سرعت لحظه $t = 2s$ ، به صورت سرعت ثابت به حرکت خود ادامه

می‌دهد. به کمک دو رابطه $x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$ ، معادله سرعت - زمان حرکت متحرک در SI، به صورت $v = 2t + 4$ ،

$$v(2) = 2 \times 2 + 4 = 8 \frac{m}{s} \Rightarrow \Delta x_2 = 8 \times 3 = 24 \text{ m} \quad \text{است:}$$

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 12 + 24 = 36 \text{ m}$$

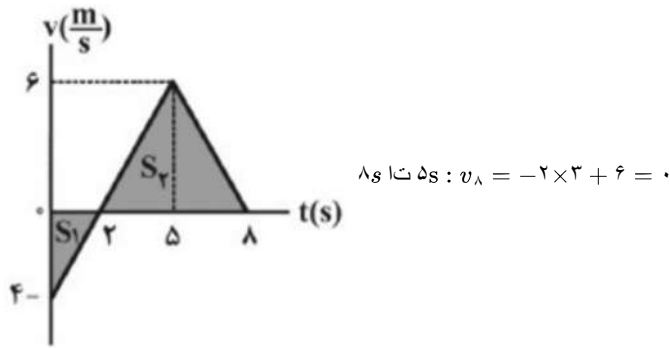
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا نمودار سرعت زمان آن را رسم می‌کنیم:

$$v = at + v_0 \xrightarrow{v_0 = -\frac{4}{3} \frac{m}{s}} \text{صفر تا } ۵s: v_5 = 2 \times 5 - \frac{4}{3} = \frac{6}{3} \frac{m}{s}$$

سپس در این بازه‌ی زمانی، لحظه‌ی تغییر جهت را محاسبه می‌کنیم:

$$v = 2t - \frac{4}{3} \xrightarrow{v=0} t = \frac{2}{3}s$$

در ادامه‌ی سرعت متحرک را در لحظه‌ی $\frac{2}{3}s$ به دست می‌آوریم. با توجه به این‌که سرعت اولیه‌ی متحرک در بازه‌ی زمانی $\frac{2}{3}s$ تا $۵s$ همان $\frac{6}{3} \frac{m}{s}$ است، داریم:



می‌دانیم که مساحت محصور بین نمودار سرعت - زمان و محور زمان، نشان‌دهنده‌ی جابه‌جایی متحرک است. پس

$$\Delta x_1 = -S_1 = -\frac{\frac{4}{3} \times \frac{2}{3}}{2} = -\frac{4}{9}m \quad \text{داریم:}$$

$$\Delta x_2 = S_2 = \frac{(8-2) \times \frac{6}{3}}{2} = 18m$$

$$\Delta x_{\text{کل}} = \Delta x_1 + \Delta x_2 = -\frac{4}{9} + 18 = 17\frac{8}{9}m$$

$$l_{\text{کل}} = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| = \frac{4}{9} + 18 = 18\frac{4}{9}m$$

$$\frac{l_{\text{کل}}}{\Delta x_{\text{کل}}} = \frac{18\frac{4}{9}}{17\frac{8}{9}} = \frac{11}{10}$$

بنابراین، می‌توان نوشت:

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. شتاب متوسط، $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ است و Δv مساحت زیر نمودار $a-t$ است. در بازه‌ی مدنظر سؤال، مثلثی شکل است. مساحت مثلث برابر ارتفاع ضرب در قاعده تقسیم بر دو است:

$$\frac{a_{av_1}}{|a_{av_2}|} = \frac{\frac{\frac{6}{3} \times \frac{6}{3}}{2}}{\frac{\frac{3}{3} \times \frac{6}{3}}{2}} = \frac{3}{\frac{3}{2}} = 2$$

توجه داشته باشید که با توجه به خط راست بودن نمودار در $\frac{6}{3}$ ثانیه اول، به کمک روابط خط راست می‌توانیم لحظه صفر شدن شتاب را به دست آوریم.

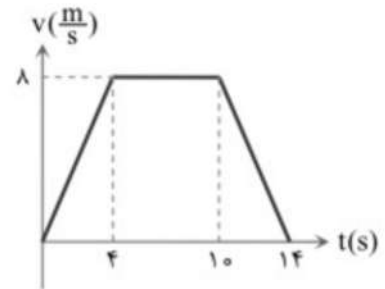
گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

درستی گزینه‌ی «۱»: اگر نمودار $v - t$ را رسم کنیم مطابق رابطه $\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ صفر است.

درستی گزینه‌ی «۲»: $s = \Delta x = \frac{1}{2} (14 + 6)(8)$

نادرستی گزینه‌ی «۳»: $\bar{s} = \frac{80}{14} = \frac{40}{7} = \frac{m}{s}$

درستی گزینه‌ی «۴»: در ۴ ثانیه‌ی اول متحرک به سرعت $\frac{8}{s} m$ می‌رسد و به مدت ۶ ثانیه با این سرعت ثابت ادامه داده و با شتاب $\frac{2}{s^2} m$ در مدت ۴ ثانیه متوقف می‌شود.



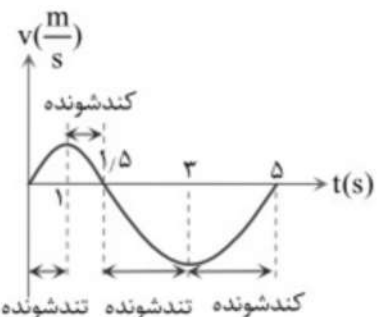
گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$18 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_2^2 - v_1^2 = 2a\Delta x \Rightarrow 25 - 16 = 2a \times 9 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{5 - 4}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = 2 \text{ s}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. بررسی نمودار:



در $0 < t < 1/5 \Rightarrow v > 0 \Leftarrow$ جهت حرکت مثبت محور x ها

در $1/5 < t < 5 \Rightarrow v < 0 \Leftarrow$ خلاف جهت محور x ها

در $t = 1/5 \Leftarrow$ سرعت تغییر جهت می‌دهد $\Leftarrow$ تغییر جهت حرکت

در $t = 1$ و $t = 3$ شیب نمودار (a) تغییر علامت می‌دهد.

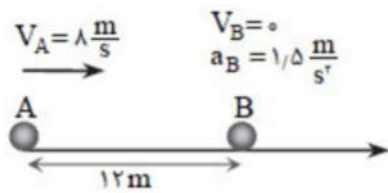
گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$h = y_{BC} = \left(\frac{V_B + V_C}{2} \right) (t)$$

$$\Rightarrow y_{BC} = h = \left(\frac{8 + (8 + 10 \times 0.4)}{2} \right) (0.4) = 4 \text{ m} \Rightarrow H = 4h = 16 \text{ m}$$

$$-16 = -5t^2 \Rightarrow t^2 = \frac{16}{5} \Rightarrow t = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

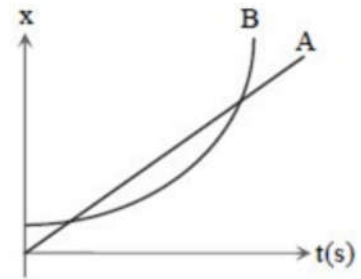
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اتوبوس B و شخص A است.

$$\begin{aligned}
 &V_A = 8 \frac{m}{s} \quad V_B = 0 \\
 &a_B = 1/5 \frac{m}{s^2} \\
 &x_A = 8t \\
 &x_B = \frac{1}{2} \times 8/5 t^2 + 0 + 12 = \frac{4}{5} t^2 + 12
 \end{aligned}$$


دو جواب دارد.

$$B, A \text{ فاصله } x = x_B - x_A = \frac{4}{5} t^2 - 8t + 12 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow$$

نمودار مکان زمان A و B، در ۲ لحظه به هم می‌رسند. بنابراین فاصله A و B کاهش، افزایش، کاهش، دوباره افزایش می‌یابد.



$$V_{\cdot} = -10$$

$$V_{1\cdot} = -10 + 20 = 10$$

$$V_{1\delta} = 10 + 20 = 30$$

$$V_{2\delta} = 30 - 40 = -10$$

از تشابه S_1 و S_2 :

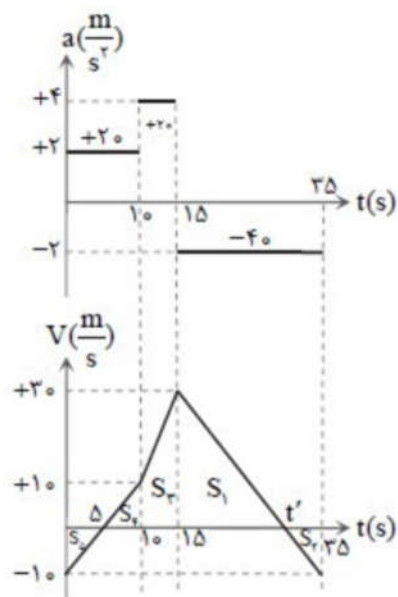
$$\frac{t' - 15}{30} = \frac{35 - t'}{10}$$

$$t' - 15 = 105 - 3t' \Rightarrow t' = 30s$$

در t' بیشترین فاصله را دارد.

$$\Delta x = S_2 - S_3 + S_2 + S_1 = S_2 + S_1$$

$$= \frac{10 + 30}{2} \times 5 + \frac{30 \times 15}{2} = 325m$$



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. سرعت اولیه را v در نظر می‌گیریم. بعد از ۲ ثانیه حرکت با شتاب $2 \frac{m}{s^2}$ سرعت برابر

$v + 2 \times 2$ خواهد شد و پس از ۳ ثانیه‌ی حرکت با شتاب -2 سرعت برابر $v + 2 \times 2 - 2 \times 2 = v$ می‌شود یعنی:

$$\left. \begin{aligned} t = 0 &\Rightarrow v = v \\ t = 2 &\Rightarrow v = v + 4 \\ t = 2 &\Rightarrow v = v + 4 \\ t = 5 &\Rightarrow v = v - 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow v_{av,2} = \frac{v + (v + 4)}{2} = v + 2$$

$$\left. \begin{aligned} t = 2 &\Rightarrow v = v + 4 \\ t = 5 &\Rightarrow v = v - 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow v_{av,3} = \frac{(v + 4) + (v - 2)}{2} = v + 1$$

سپس از روی سرعت متوسط، جابه‌جایی در هر بازه را حساب می‌کنیم:

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta x_{1,2} &= v_{av,2} \times \Delta t = (v + 2) \times 2 \\ \Delta x_{2,3} &= v_{av,3} \times \Delta t = (v + 1) \times 3 \end{aligned} \right. \Rightarrow \Delta x_{کل} = (v + 2) \times 2 + (v + 1) \times 3$$

$$v_{av,کل} = \frac{\Delta x_{کل}}{\Delta t} \Rightarrow 6/4 = \frac{(v + 2) \times 2 + (v + 1) \times 3}{5} \Rightarrow 5 \times 6/4 = 32 = 2v + 4 + 3v + 3$$

$$\Rightarrow 32 = 5v + 7 \Rightarrow 25 = 5v \Rightarrow v = 5 \frac{m}{s}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. معادله مکان اتومبیل با سرعت ثابت:

$$x_A = 20t$$

معادله مکان اتومبیل شتابدار:

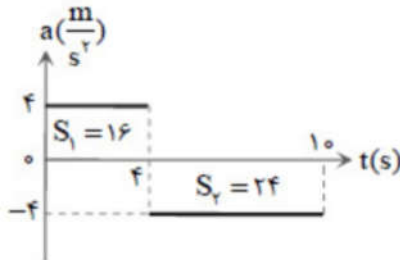
$$x_B = \frac{1}{2} \times 2 \times t^2 + 0 \times t + 36$$

در لحظات سبقت گرفتن مکان آن دو برابر می‌شود:

$$x_A = x_B \Rightarrow 20t = t^2 + 36 \Rightarrow t^2 - 20t + 36 = 0 \Rightarrow (t-2)(t-18) = 0 \Rightarrow t = \begin{cases} 2s \\ 18s \end{cases}$$

که فاصله زمانی بین این دو لحظه ۱۶s است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۲۵



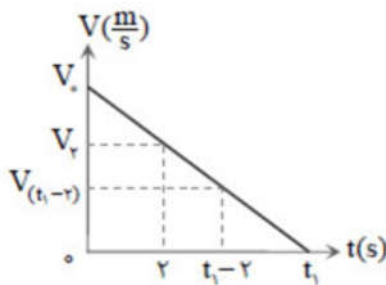
$$v_4 = v_0 + S_1 = v_0 + 16$$

$$v_{10} = v_4 - S_2 = v_0 + 16 - 24 = v_0 - 8$$

$$\Delta x = \Delta x_{0-4} + \Delta x_{4-10} = \frac{v_0 + v_4}{2} \times 4 + \frac{v_4 + v_{10}}{2} \times 6$$

$$= \frac{v_0 + v_0 + 16}{2} \times 4 + \frac{v_0 + 16 + v_0 - 8}{2} \times 6 \Rightarrow 156 = 4v_0 + 32 + 6v_0 + 24 \Rightarrow v_0 = 10 \frac{m}{s}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۲۶



$$a = \frac{-v_0}{t_1}$$

$$v = at + v_0 \Rightarrow v_{t=2} = \left(\frac{-v_0}{t_1} \right)(2) + v_0$$

$$v_{t_1-2} = \frac{-v_0}{t_1}(t_1 - 2) + v_0$$

$$\Delta x = \bar{v} \cdot t$$

$$\Delta x = \frac{v_0 + \left(v_0 - \frac{2v_0}{t_1} \right)}{2} \times 2 = 36$$

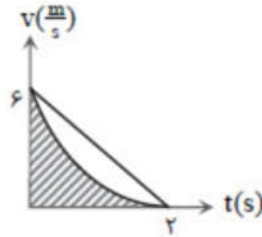
$$\Delta x = \frac{\left(-v_0 + \frac{2v_0}{t_1} + v_0 \right) + 0}{2} \times 2 = 4$$

$$\Rightarrow 2v_0 - \frac{2v_0}{t_1} = 36, \frac{2v_0}{t_1} = 4 \Rightarrow v_0 = 20 \Rightarrow t_1 = 10s$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\bar{a} = \frac{0 - 6}{2} = -3 \frac{m}{s^2}$$

نادرستی گزینه‌ی ۱:



$$S = \frac{1}{2} \times 6 \times 2 = 6$$

درستی گزینه‌ی ۲:

نادرستی گزینه‌ی ۳: با توجه به این که مقدار سرعت، ابتدا کاهش می‌یابد و سپس افزایش دارد، ابتدا حرکت کندشونده و سپس تندشونده است.

نادرستی گزینه‌ی ۴: سرعت همواره مثبت است، پس متحرک همواره در سوی مثبت حرکت می‌کند و جابه‌جایی آن مثبت است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. برای تغییر جهت روی خط راست سرعت متحرک باید صفر شود و قبل و بعد از آن باید تغییر علامت سرعت بدهد.

گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه‌ی «۱»: نمودار مکان - زمان است و شیب نمودار نشان‌دهنده سرعت در پایان حرکت صفر می‌شود ولی تغییر جهت نداریم.

گزینه‌ی «۲»: نمودار سرعت - زمان است. سرعت همواره مثبت است و تغییر جهت نداریم.

گزینه‌ی «۳»: یک بار سرعت صفر می‌شود پس یک تغییر جهت داریم.

گزینه‌ی «۴»: نمودار شتاب - زمان است. شتاب در ابتدا مثبت و سپس منفی است. اگر سرعت اولیه منفی بوده باشد می‌تواند در قسمت اول یک بار سرعت صفر شود و سپس مثبت شود و در قسمت دوم که شتاب منفی می‌شود می‌تواند بار دیگر سرعت صفر شود و دوباره منفی شود. بنابراین ممکن است دو تغییر جهت داشته باشیم.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{aligned} \Delta y_1 &= -\frac{1}{2}gt^2 \\ \Delta y_2 &= -\frac{1}{2}g(t-2)^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta y_1 - \Delta y_2 = -60 \text{ m}$$

$$-\frac{1}{2}gt^2 - \left[-\frac{1}{2}g(t^2 - 4t + 4) \right] = -60 \Rightarrow t = 4 \text{ s}$$

$$\Delta y = -\frac{1}{2}gt^2 \xrightarrow{t=4} \Delta y = -5 \times 16 = -80 \text{ m}$$

$$\Delta y = -5 \times 4^2 = -80 \text{ m}$$

$$h = 80 \text{ m}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بررسی گزینه‌ها:

۱۳۰

گزینه ۱: نادرست است. زیرا با توجه به رابطه‌ی شتاب متوسط داریم:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \xrightarrow{v_{t_1} = 0, v_{t_2} < 0, \Delta t > 0} a_{av} > 0$$

گزینه ۲: نادرست است. زیرا زمانی اندازه‌ی کمیت‌های مسافت و جابه‌جایی با یکدیگر برابرند که جهت حرکت متحرک تغییر نکند. با توجه به نمودار در لحظه‌ی t_2 جهت حرکت متحرک تغییر کرده است.

گزینه ۳: نادرست است. زیرا در لحظات t_1 و t_2 جهت بردار شتاب متحرک عوض شده است. جهت حرکت متحرک زمانی تغییر می‌کند که تندی صفر شود و علامت سرعت متحرک قبل و بعد از آن لحظه متفاوت باشد.

گزینه ۴: درست است. زیرا در نمودار سرعت - زمان هنگامی‌که با گذشت زمان، نمودار به محور زمان نزدیک می‌شود. اندازه‌ی سرعت کاهش می‌یابد. بنابراین نوع حرکت در بازه‌ی زمانی t_1 تا t_2 کندشونده است. از طرفی شیب خط مماس بر نمودار سرعت - زمان برابر شتاب متحرک است. چون در این بازه‌ی زمانی شیب خط مماس منفی است. بنابراین شتاب متحرک نیز منفی می‌باشد.

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow \Delta v = 5 \times (-4) = -20 \frac{m}{s}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۱۳۱

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow \Delta v = (2)(2) = 4 \frac{m}{s} \\ \Rightarrow \bar{a} &= \frac{\Delta v + \Delta v}{\Delta t} = \frac{-20 + 4}{2} = -8 \frac{m}{s} \end{aligned}$$

$$V_A = 10 \frac{m}{s} \Rightarrow x_A = 10t + 400$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۱۳۲

$$V_B = 20 \frac{m}{s} \Rightarrow x_B = 20t - 300$$

$$x_A - x_B = 600 \Rightarrow -20t + 700 = 600 \Rightarrow t_1 = 5$$

$$x_A - x_B = -600 \Rightarrow -20t + 700 = -600 \Rightarrow t_2 = 65s$$

$$\frac{t_2}{t_1} = 13$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. کل جابه‌جایی متحرک برابر با مجموع جابه‌جایی‌های آن است، بنابراین:

۱۳۳

$$\vec{d} = \vec{d}_1 + \vec{d}_2 = (2m)\vec{i} + (5m)\vec{i} = (7m)\vec{i}$$

زمان حرکت برابر با مجموع زمان‌های جابه‌جایی‌های انجام شده است، بنابراین:

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = 2 + 3 = 5s$$

$$\vec{v}_{av} = \frac{\vec{d}}{\Delta l} = \frac{(7m)\vec{i}}{5s} = \left(1.4 \frac{m}{s}\right)\vec{i}$$

بنابراین سرعت متوسط متحرک برابر است با:

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۱۳۴

چون معادله‌ی مکان سهمی داده شده است، در رأس سهمی جسم تغییر جهت می‌دهد.

$$t = -\frac{b}{2a} = 5s$$

$$x = -2 \times 25 + 20 \times 5 \Rightarrow x = 50m$$

$$\frac{40}{10} = \frac{120}{t_1} \Rightarrow t_1 = 30s$$

$$\frac{160}{50 - 30} = \frac{80}{t_2 - 30} \Rightarrow t_2 = 40s$$

$$0 < t < 10 \Rightarrow \Delta x = -200m$$

$$10 < t < 30 \Rightarrow \Delta x = 800m$$

$$30 < t < 40 \Rightarrow \Delta x = 400m$$

$$40 < t < 50 \Rightarrow \Delta x = -400m$$

$$t = 0 \Rightarrow x = 0$$

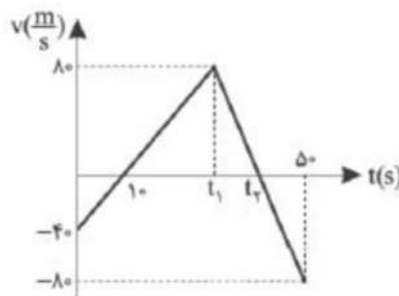
$$t = 10 \Rightarrow x = -200m$$

$$t = 30 \Rightarrow x = 600m$$

$$t = 40 \Rightarrow x = 1000m$$

$$t = 50s \Rightarrow x = 600m$$

پس بیشترین فاصله از مبدأ در $t = 40s$ بوده و برابر ۱۰۰۰ متر است.



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بردار سرعت، جهت حرکت را مشخص می‌کند. بردار شتاب، اطلاعاتی راجع به مسیر حرکت به ما نمی‌دهد. اگر بردار مکان و سرعت در خلاف جهت هم باشند، متحرک در حال نزدیک شدن به مبدأ مکان است. در بین گزینه‌ها، گزینه‌ی ۳ دارای این شرایط است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چون نمودار مکان - زمان به صورت سهمی است، بنابراین شتاب حرکت ثابت است. شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان در لحظه‌ی $t = 3s$ برابر با صفر است. در نتیجه سرعت متحرک در لحظه‌ی $t = 3s$ برابر با صفر است.

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t=3s) - v(t=5s)}{5s - 3s} = \frac{0 - 20 \frac{m}{s}}{2s} = -10 \frac{m}{s^2}$$

اکنون با توجه به رابطه‌ی سرعت در حرکت با شتاب ثابت، سرعت اولیه‌ی متحرک را به دست می‌آوریم:

$$v = at + v_0 \xrightarrow[t=3s, a=-10 \frac{m}{s^2}]{v(t=3s)=0} v_0 = -12 \frac{m}{s}$$

در ادامه با توجه به رابطه‌ی جابه‌جایی در حرکت با شتاب ثابت، جابه‌جایی متحرک را در سه ثانیه‌ی اول حرکت به دست می‌آوریم:

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \xrightarrow{t=3s} \Delta x = \frac{1}{2} \times (-10) \times 3^2 - 12 \times 3 \Rightarrow \Delta x = 18 - 36 = -18m$$

بنابراین هنگامی‌که جهت حرکت متحرک در لحظه‌ی $t = 3s$ عوض می‌شود، متحرک در ۱۸ متری x (مبدأ حرکت) قرار دارد.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مساحت محصور بین نمودار شتاب - زمان و محور زمان برابر با تغییرات سرعت متحرک است. سرعت متحرک را در لحظه‌ی $t = ۴s$ به دست می‌آوریم:

$$S = \Delta v \xrightarrow{S=۲ \times ۴=۸ \frac{m}{s}, v_0=-۱ \cdot \frac{m}{s}} v_{(t=۴s)} = \Delta v + v_0 = ۸ - ۱ = ۷ \frac{m}{s}$$

اکنون سرعت متحرک را در لحظه‌ی $t = ۱۰s$ به دست می‌آوریم:

$$S' = \Delta v' \xrightarrow{v_{(t=۴s)}=۷ \frac{m}{s}, S'=-۴ \times ۶=-۲۴ \frac{m}{s}} v_{(t=۱۰s)} = \Delta v' + v_{(t=۴s)} = -۲۴ + ۷ = -۱۷ \frac{m}{s}$$

با استفاده از رابطه‌ی سرعت متوسط در حرکت با شتاب ثابت، داریم:

$$\frac{v_0 + v_{(t=۴s)}}{۲} = \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} \xrightarrow{v_0=-۱ \cdot \frac{m}{s}, v_{(t=۴s)}=۷ \frac{m}{s}, \Delta t_1=۴s} \frac{-۱ + ۷}{۲} = \frac{\Delta x_1}{۴} \Rightarrow \Delta x_1 = ۱۲m$$

$$\frac{v_{(t=۴s)} + v_{(t=۱۰s)}}{۲} = \frac{\Delta x_2}{\Delta t_2} \xrightarrow{v_{(t=۴s)}=۷ \frac{m}{s}, v_{(t=۱۰s)}=-۱۷ \frac{m}{s}, \Delta t_2=۱۰-۴=۶s} \frac{۷ - ۱۷}{۲} = \frac{\Delta x_2}{۶}$$

$$\frac{-۱۰}{۲} = \frac{\Delta x_2}{۶} \Rightarrow \Delta x_2 = -۳۰m$$

اکنون با استفاده از رابطه‌ی سرعت متوسط داریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{\Delta t_1 + \Delta t_2} \xrightarrow{\Delta x_1=۱۲m, \Delta x_2=-۳۰m} v_{av} = \frac{۱۲ - ۳۰}{۱۰} = -۱.۸ \frac{m}{s}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. برای محاسبه‌ی مسافت طی شده، باید ابتدا تعیین کنیم متحرک در بازه‌ی زمانی موردنظر تغییر جهت داده است و یا خیر. بنابراین ابتدا لحظه‌ای که متحرک تغییر جهت می‌دهد را می‌یابیم:

$$\left. \begin{aligned} x &= -t^2 + ۴t - ۴ \\ x &= \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = -۲ \frac{m}{s^2}, v_0 = ۴ \frac{m}{s}$$

$$v = at + v_0 = -۲t + ۴ = 0 \Rightarrow t = ۲s$$

بنابراین مسافت طی شده طی ۴ ثانیه‌ی ابتدایی حرکت برابر است با:

$$\left. \begin{aligned} t_1 = 0 \Rightarrow x_1 &= -۴m \\ t_2 = ۲s \Rightarrow x_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta x_1 = 0 - (-۴) = ۴ \Rightarrow L_1 = ۴m$$

$$\left. \begin{aligned} t_3 = ۲s \Rightarrow x_3 &= 0 \\ t_4 = ۴s \Rightarrow x_4 &= -۴m \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta x_2 = (0) - 0 = -۴ \Rightarrow L_2 = ۴m$$

$$L = L_1 + L_2 = ۴ + ۴ = ۸$$

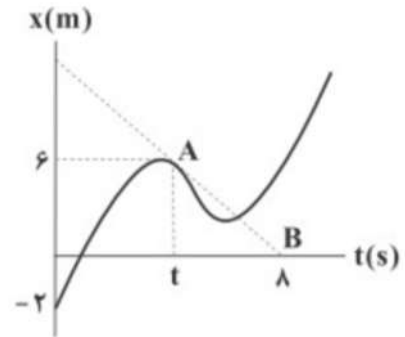
برای محاسبه‌ی جابه‌جایی در ۴ ثانیه‌ی ابتدایی حرکت، داریم:

$$\left. \begin{aligned} t_1 = 0 \Rightarrow x_1 &= -۴m \\ t_2 = ۴s \Rightarrow x_2 &= -۴m \end{aligned} \right\} \Rightarrow d = x_2 - x_1 = -۴ - (-۴) = 0$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در نمودار مکان - زمان در مدتی که x مثبت باشد، به معنی آن است که بردار مکان متحرک در جهت محور x ها بوده و در مدتی که x منفی باشد، به معنی آن است که بردار مکان متحرک در خلاف جهت محور x ها بوده است، پس در بازه‌ی زمانی $0 \leq t \leq ۱۵s$ ، یعنی ۱۵ ثانیه بردار مکان متحرک، در جهت محور x ها بوده است. متحرک از لحظه‌ی $t = ۱۲s$ تا لحظه‌ی $t = ۲۲s$ به مدت $۱۰s$ در خلاف جهت محور x ها حرکت کرده است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\Delta t_{0 \rightarrow ۱۵} \Delta t_{۱۲ \rightarrow ۲۲} = \frac{۱۵}{۱۰} = \frac{۳}{۲}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در نمودار مکان - زمان، قدرمطلق شیب خط مماس بر نمودار در هر لحظه، بزرگی سرعت متحرک در آن لحظه است. در نتیجه باید قدرمطلق شیب خط مماس بر نمودار در لحظه‌ی t برابر با $\frac{3}{4} \frac{m}{s}$ شود، یعنی قدرمطلق شیب پاره‌خط AB در نمودار زیر، برابر با $\frac{3}{4}$ است. با توجه به این نکات می‌توان نوشت:



$$|m_{AB}| = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{6}{(8-t)} = \frac{3}{4} \Rightarrow 4 = 8-t \Rightarrow t = 4s$$

با توجه به نمودار بالا مشخص است که متحرک در لحظه‌ی $t = 0$ در مکان $x = -2m$ و در لحظه‌ی $t = 4s$ در مکان $x = +6m$ قرار دارد، بنابراین سرعت متوسط متحرک در این بازه‌ی زمانی برابر است با:

$$\vec{v}_{av} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{6 - (-2)}{4} = \frac{8}{4} = +2 \frac{m}{s}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

الف) سرعت متوسط شیب خط واصل بین دو لحظه در نمودار مکان - زمان است. از لحظه‌ی صفر تا t_5 شیب خط واصل مثبت است، پس $v_{av} > 0$ است. (درست)

ب) طبق تعریف، بردار جابه‌جایی، برداری است که مکان اولیه‌ی جسم را به مکان نهایی آن متصل می‌کند. طبق نمودار مکان - زمان، $\Delta x > 0$ است. (درست)

پ) در لحظه‌هایی که $x = 0$ است و متحرک از مبدأ مختصات عبور می‌کند، جهت بردار مکان تغییر می‌کند (لحظه‌های t_1 و t_3). پس جهت بردار مکان ۲ بار تغییر می‌کند. (نادرست)

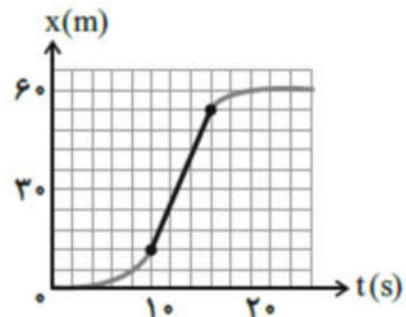
ت) وقتی که سرعت متحرک صفر است و علامت سرعت نیز تغییر می‌کند، جهت حرکت تغییر می‌کند. طبق نمودار، در لحظه‌های t_2 و t_4 جهت حرکت متحرک تغییر کرده است. (درست)

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. سرعت متحرک وقتی بیشینه است که شیب مماس بر منحنی بیشینه باشد، در این نمودار، بازه‌ی زمانی ۱۰ تا ۱۶ ثانیه دارای بیش‌ترین مقدار شیب است.

پس دو نقطه‌ی متناظر ۱۰ و ۱۶ ثانیه از منحنی را به هم وصل می‌کنیم و داریم:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{54 - 12}{6} = \frac{42}{6} = 7 \frac{m}{s}$$

دقت کنید هر واحد روی محور عمودی معادل $6m$ و هر واحد روی محور افقی معادل $2s$ است.



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل می‌توان نوشت:

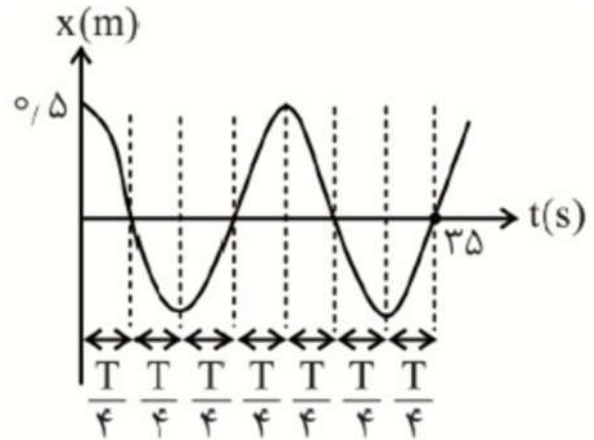
$$۳۵ = V \frac{T}{۴} \Rightarrow \frac{T}{۴} = ۵s \Rightarrow T = ۲۰s$$

حال که دوره‌ی تناوب را داریم:

$$\omega = \frac{۲\pi}{T} = ۰/۱\pi$$

$$A = ۰/۵m \quad \text{از طرفی دامنه هم داریم:}$$

$$x = A \cos \omega t \Rightarrow x = ۰/۵ \cos ۰/۱\pi t$$

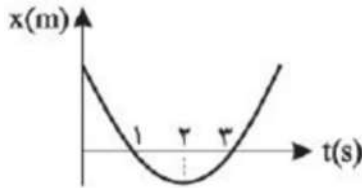


گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

ابتدا لحظات عبور از مبدأ را پیدا می‌کنیم: $x = ۰$

$$۳t^۲ - ۱۲t + ۹ = ۰ \Rightarrow t^۲ - ۴t + ۳ = ۰ \Rightarrow (t - ۱)(t - ۳) = ۰$$

در لحظات $t_۱ = ۱s$ و $t_۲ = ۳s$ متحرک از مبدأ عبور می‌کند. نمودار مکان-زمان را رسم می‌کنیم:



به این ترتیب برای بازه‌های زمانی مختلف داریم:

حرکت کندشونده و جسم به مبدأ نزدیک می‌شود. $۰ < t < ۱ \Rightarrow$

حرکت کندشونده و جسم از مبدأ دور می‌شود. $۱ < t < ۲ \Rightarrow$

حرکت تندشونده و جسم به مبدأ نزدیک می‌شود. $۲ < t < ۳ \Rightarrow$

حرکت تندشونده و جسم از مبدأ دور می‌شود. $t > ۳ \Rightarrow$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. میزان جابه‌جایی‌ها در t ثانیه‌های متوالی، تشکیل تصاعد حسابی می‌دهد، بنابراین جابه‌جایی‌ها به صورت زیر می‌شوند:

$$20 \Rightarrow 3 \text{ ثانیه‌ی اول مسیر}$$

$$\Delta x \Rightarrow 3 \text{ ثانیه‌ی دوم مسیر}$$

$$80 \text{ m} \Rightarrow 3 \text{ ثانیه‌ی سوم مسیر}$$

همان‌طور که می‌دانیم، جمله‌ی دوم از میانگین جملات اول و سوم به دست می‌آید، بنابراین:

$$\Delta x = \frac{20 + 80}{2} = 50 \text{ m}$$

$$\Delta x_{\text{کل}} = 20 + 50 + 80 = 150 \text{ m}$$

در نتیجه جابه‌جایی در ۹ ثانیه‌ی اول مسیر برابر است با:

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا به کمک شیب خط مماس بر نمودار در لحظه‌ی $t + 3$ ، سرعت متحرک را در این لحظه به دست می‌آوریم:

$$v_{t+3} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{80 - 0}{t + 3 - (t + 1)} = \frac{80}{2} = 40 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

حال به کمک معادله‌ی سرعت - جابه‌جایی در حرکت با شتاب ثابت، شتاب حرکت را محاسبه می‌کنیم. حواستان باشد که سرعت در لحظه‌ی $t = 0$ برابر صفر است، زیرا شیب خط مماس بر نمودار در این لحظه صفر است، بنابراین:

$$\Delta x = x_{\text{نهایی}} - x_{\text{اولی}} = 80 - (-20) = 100 \text{ m}$$

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow 40^2 = 2 \times a \times 100 \Rightarrow a = \frac{1600}{200} = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

حال به کمک قانون دوم نیوتون، اندازه‌ی نیروی خالص وارد بر متحرک برابر است با:

$$F_{\text{net}} = ma = 40/5 \times 8 = 64 \text{ N}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به نمودار، چون تقعر نمودار رو به پایین است، شتاب حرکت منفی است. بنابراین گزینه‌های ۲ و ۴ حذف می‌شوند. از طرف دیگر، چون در لحظه‌ی $t = 0$ ، شیب نمودار مکان - زمان منفی است؛ لذا سرعت اولیه نیز منفی می‌باشد. بنابراین این نمودار مربوط به متحرکی است که با شتاب منفی در خلاف جهت محور x در حرکت است. یعنی گزینه‌ی ۳ صحیح است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا با استفاده از معادله‌ی مستقل از شتاب، سرعت اولیه را می‌یابیم:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{v_f + v_i}{2} \Rightarrow \frac{0 - 9}{3} = \frac{v_i + 0}{2} \Rightarrow v_i = -9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v = at + v_i \Rightarrow 0 = a \times 3 + (-9) \Rightarrow a = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

اکنون شتاب متحرک را پیدا می‌کنیم:

$$v = at + v_i \Rightarrow v = 3t - 9$$

بنابراین معادله‌ی سرعت - زمان متحرک برابر است با:

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در ابتدا، با توجه به این که در تمامی نمودارها، جابه‌جایی در مدت ۲ ثانیه برابر ۱۰ متر است، v را می‌یابیم.

برای نمودارهای ۱ و ۲ که شتابشان منفی است، داریم:

$$\Delta v = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \Rightarrow 10 = \frac{1}{2}(-1)(2)^2 + v_0(2) \Rightarrow v_0 = \frac{6}{s} \frac{m}{s}$$

$$v = at + v_0 \Rightarrow v = (-1)(2) + 6 \Rightarrow v = +4 \frac{m}{s}$$

تا این‌جا فقط گزینه‌ی ۱ درست است. زیرا در شکل گزینه‌ی ۲ $v_2 < 0$ است. اکنون برای نمودارهای گزینه‌ی ۳ و گزینه‌ی ۴ که شتاب آن مثبت است، داریم:

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \Rightarrow 10 = \frac{1}{2}(1)(2)^2 + v_0(2) \Rightarrow v_0 = \frac{4}{s} \frac{m}{s}$$

$$v = at + v_0 \Rightarrow v_2 = (1)(2) + 4 = \frac{6}{s} \frac{m}{s} \neq \frac{4}{s} \frac{m}{s}$$

برای شکل‌های گزینه‌ی ۳ و گزینه‌ی ۴ که $a > 0$ است، $v_{2s} = \frac{6}{s} \frac{m}{s}$ می‌شود.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. فرض می‌کنیم کل زمان سفر برابر t ساعت باشد، بنابراین با توجه به این که دوچرخه‌سوار، ۲ ساعت توقف کرده است، مدت $t - 2$ ساعت را با تندی $40 \frac{km}{h}$ حرکت کرده است. با توجه به این توضیحات می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \text{مسافت: } l = 40(t - 2) \\ \text{زمان کل: } t \end{cases} \Rightarrow s_{av} = \frac{l}{t} = \frac{40(t - 2)}{t}$$

$$\xrightarrow{s_{av} = 32 \frac{km}{h}} 32 = \frac{40(t - 2)}{t} \Rightarrow 32t = 40t - 80 \Rightarrow t = 10h$$

بنابراین فاصله‌ی بین دو شهر برابر است با:

$$l = 40(t - 2) = 40(10 - 2) = 320 km$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. زمانی که جسم را روی سطحی پرتاب می‌کنیم، تنها نیرویی که روی آن اثر می‌گذارد، نیروی اصطکاک است. پس می‌توان به کمک آن، شتاب توقف جسم را پیدا کرد:



$$a = \frac{F_{net}}{m} = \frac{-f_k}{m} = \frac{-\mu_k F_N}{m} \xrightarrow{F_N = mg} a = \frac{-\mu mg}{m} \Rightarrow A = -\mu_k g$$

$$a = -0.16 \times 10 = -1/6 \frac{m}{s^2}$$

برای این حرکت، شتاب توقف برابر است با:

حال می‌توان به کمک معادله‌ی سرعت - جابه‌جایی در حرکت با شتاب ثابت، سرعت اولیه‌ی جسم را به دست آورد. در نظر داشته باشید که سرعت نهایی جسم برابر صفر است، زیرا جسم متوقف شده است، بنابراین:

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow -v_0^2 = 2 \times (-1/6) \times 20 \Rightarrow -v_0^2 = -64 \Rightarrow v_0 = \sqrt{64} = 8 \frac{m}{s}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. برای درک بهتر نمودار سرعت - زمان هر دو متحرک را رسم می‌کنیم. با این توضیح که زمان شروع و پایان حرکت هر دو متحرک با هم برابر بوده و ۲۰ ثانیه است.

چون متحرک A در نهایت به متحرک B می‌رسد، جابه‌جایی (سطح زیر نمودار) هر دو متحرک با هم برابر است. داریم:

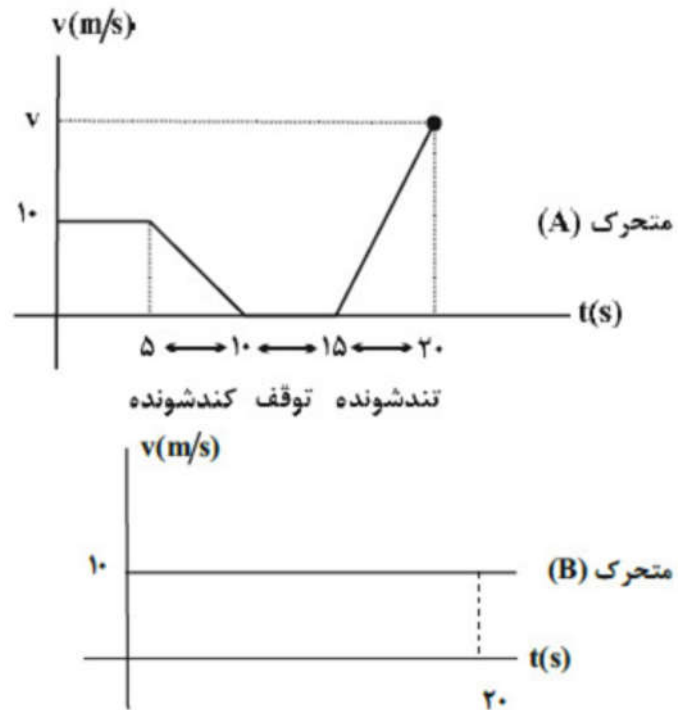
$$\Delta x_A = \Delta x_B \Rightarrow \frac{(5+10) \times 10}{2} + \frac{v(5)}{2}$$

$$= 10 \times 20 \Rightarrow 125 = 2/5v$$

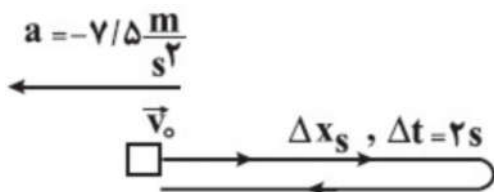
$$\Rightarrow 125 = 2/5v \Rightarrow v = 50 \frac{m}{s}$$

بنابراین اندازه‌ی شتاب در مرحله‌ی تندشونده‌ی حرکت موتورسوار B برابر است با:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{50 - 0}{20 - 15} = 10 \frac{m}{s^2}$$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در ابتدا سرعت ثابت است، چون شتاب برابر صفر است. بنابراین برآیند نیروها صفر می‌باشد. با حذف نیروی $\vec{F}_r$ ، اندازه‌ی برآیند دو نیروی $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ برابر اندازه‌ی نیروی $\vec{F}_r$ و در خلاف جهت آن خواهد بود. بنابراین، در این حالت حرکت جسم کندشونده است. لذا داریم:



$$F_{net} = ma \quad \xrightarrow{F_{net} = |\vec{F}_1 + \vec{F}_2| = |\vec{F}_r|}$$

$$-15 = 2a \Rightarrow a = -7.5 \frac{m}{s^2}$$

$$|\Delta x_s| = \frac{1}{2} |a| t^2 = \frac{1}{2} \times 7.5 \times 4 = 15m$$

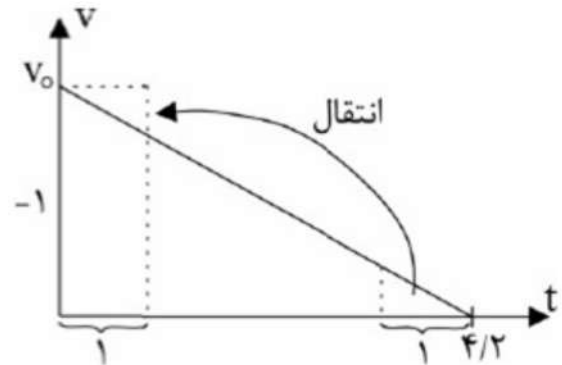
$$L = 2 |\Delta x_s| = 30m$$

۱۵۶

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. نمودار سرعت - زمان متحرک را رسم می‌کنیم و از خلاقیت زیبایی بهره می‌گیریم:
با اتصال مثلث مربوط به جابه‌جایی در ثانیه آخر به دوزنقه جابه‌جایی در ثانیه اول، به یک مستطیل با طول V و عرض ۱ ثانیه می‌رسیم.

$$10m = V \cdot 1 \Rightarrow V = 10 \frac{m}{s}$$

$$\Delta x_{\text{کل}} = \frac{V \cdot 4/2}{2} = \frac{10 \cdot 4/2}{2} = 10m$$



۱۵۷

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. گلوله اول ۳ ثانیه بیش‌تر از گلوله دوم در حرکت است. داریم:

$$y_1 = \frac{1}{2}g(t+3)^2 = 5(t+3)^2 \Rightarrow y_1 = 5t^2 + 30t + 45$$

$$y_2 = \frac{1}{2}gt^2 = 5t^2$$

$$y_1 - y_2 = 165m \xrightarrow{1,2} 5t^2 + 30t + 45 - 5t^2 = 165 \Rightarrow t = 4s$$

$$(1-1) S_{av} = \frac{L}{\Delta t}$$

۱۵۸

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۱۵۹

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$V_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow V_{av} = \frac{20 - 40}{3 - 2} \Rightarrow V_{av} = \frac{-20}{1} = -20 \frac{m}{s}$$

راه حل اول: می‌دانیم در حرکت با شتاب ثابت جابجایی در بازه‌های زمانی مساوی و متوالی t ، تصاعدی حسابی با قدرنسب at^2 می‌سازد، پس داریم:

$$d = a \times 1^2 = a$$

مسافت ثانیه سوم مسافت ثانیه دوم مسافت ثانیه اول

$$\underbrace{60 \text{ m}}_{\text{جمله اول}} + \underbrace{60 + a}_{\text{قدرنسب}} + 60 + 2a = 180 + 3a = 120 \text{ m}$$

جمله اول + قدرنسب نصف مسیر

$$\Rightarrow 3a = -60 \Rightarrow a = -20 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

راه حل دوم: استفاده از دو معادله دومجهول، زیرا در این حرکت سرعت اولیه و شتاب هر دو نامعلوم است.

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + V_0 t$$

$$\begin{cases} -3 \times \left[60 = \frac{1}{2}a(1)^2 + V_0 \times 1 \right] \\ 120 = \frac{1}{2}a(3)^2 + 3V_0 \end{cases}$$

$$\underline{-60 = \frac{1}{2}a - \frac{3}{2}a \Rightarrow 3a = -60 \Rightarrow a = -20 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$$

$$x = 9t^2 - 36t + 36 = 0 \Rightarrow 9(t-2)^2 = 0 \Rightarrow t = 2 \text{ s}$$

در این لحظه به مکان صفر می‌رسد ولی بردار مکان تغییر جهت نمی‌دهد.

با استفاده از سرعت نسبی به راحتی مسئله حل می‌شود.

$$v_{\text{نسبی}} = v_A - v_B$$

$$v_{\text{نسبی}} = 0$$

$$a_{\text{نسبی}} = x_B - x_A = -18m$$

$$\Delta x = \frac{v + v_{\text{نسبی}}}{2} \Delta t \Rightarrow -18 = \frac{0 + v_{\text{نسبی}}}{2} \times 3 \Rightarrow v_{\text{نسبی}} = -12 \frac{m}{s} = v_A - v_B$$

دقت کنید $v_A < 0$ و $v_B > 0$ است، پس $v_A - v_B < 0$ است.

راه حل دوم:

در $t = 3s$ سرعت و مکان دو متحرک یکسان است.

$$x_A = 5m \quad t = 3s \Rightarrow v_A = v_B = v_B$$

$$x_B = -13m \quad t = 3s \Rightarrow v_A = v_B = v_B$$

دقت کنید حرکت متحرک B، یکنواخت و حرکت متحرک A با شتاب ثابت انجام شده است.

$$\Delta x_B = v_B t \quad t = 3s \Rightarrow x - (-13) = v_B \times 3$$

$$\Delta x_A = \left(\frac{v_A + v_{\text{نسبی}}}{2} \right) t \quad t = 3s, v_A = v_B \Rightarrow x - 5 = \left(\frac{v_B + v_{\text{نسبی}}}{2} \right) \times 3$$

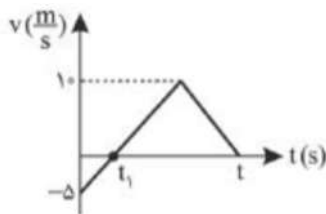
اگر دو معادله بالا را از هم کم کنیم داریم:

$$13 - (-5) = 3v_B - 3 \left(\frac{v_B + v_{\text{نسبی}}}{2} \right)$$

$$\Rightarrow 18 = 3 \left(v_B - \frac{v_B}{2} - \frac{v_{\text{نسبی}}}{2} \right) \Rightarrow 6 = \frac{v_B - v_{\text{نسبی}}}{2}$$

$$\Rightarrow v_B - v_{\text{نسبی}} = 12 \Rightarrow v_A - v_B = -12 \frac{m}{s}$$

متحرک در بازه زمانی $(t_1 - t)$ در جهت محور و در محور بازه زمانی $(0 - t_1)$ خلاف جهت محور حرکت می‌کند.



$$\begin{cases} \bar{v}_{t_1-t} = \frac{10 \times (t-t_1)}{t-t_1} = 10 \frac{m}{s} \\ \bar{S}_{0-t_1} = \frac{5 \times t_1}{t_1} = 5 \frac{m}{s} \end{cases} \Rightarrow \frac{\bar{v}}{\bar{S}} = \frac{10}{5} = 2$$

با استفاده از سرعت نسبی، مسئله را حل می‌کنیم:

$$\Delta x_{\text{نسبی}} = 50.0 \text{ m}$$

$$v_{\text{نسبی}} = 20 - 25 = -5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$a_{\text{نسبی}} = a - 0 = a$$

$$v_{\text{نسبی}} = 50 - 25 = 25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow 25^2 - (-5)^2 = 2a \times 50.0 \Rightarrow a = 0.6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

راه حل دوم:

$$v_A = 25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_{0B} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}, v_B = 50 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$(1) \Delta x_B = \left(\frac{v_B + v_{0B}}{2} \right) t = \left(\frac{50 + 20}{2} \right) t = 35t$$

$$(2) \Delta x_A = v_A t = 25t$$

$$(3) \Delta x_B = \Delta x_A + 50.0 \Rightarrow 35t = 25t + 50.0 \Rightarrow t = 5.0 \text{ s}$$

$$(4) a_B = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{50 - 20}{5.0} = \frac{30}{5.0} = 0.6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \Rightarrow a = 0.6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

اگر کل زمان حرکت t فرض شود، زمان طی ۸۱ درصد اول مسیر $t - 0.6$ است. با استفاده از رابطه $\Delta y = \frac{1}{2}gt^2$ داریم:

$$\begin{cases} h = \frac{1}{2}gt^2 \\ 0.81h = \frac{1}{2}g(t - 0.6)^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{100}{81} = \frac{t^2}{(t - 0.6)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{10}{9} = \frac{t}{t - 0.6} \Rightarrow 9t = 10t - 6 \Rightarrow t = 6 \text{ s}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

ابتدا سرعت را در لحظات داده شده محاسبه می‌کنیم. با توجه به این که $a = g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ است، داریم:

$$t = 1 \text{ s} \Rightarrow v = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$t = 2 \text{ s} \Rightarrow v = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$t = 4 \text{ s} \Rightarrow v = 40 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$0 < t < 1 \text{ s} \Rightarrow v_{\text{av}_1} = \frac{0+10}{2} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \frac{v_{\text{av}_1}}{v_{\text{av}_2}} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

$$2 \text{ s} < t < 4 \text{ s} \Rightarrow v_{\text{av}_2} = \frac{20+40}{2} = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا باید معادله سرعت - زمان متحرک را بیابیم. چون نمودار $v - t$ به صورت یک سهمی

است. معادله آن یک تابع درجه دوم است که به صورت زیر آن را می‌یابیم:

$$v = a(t - 1)^2 - 4 \xrightarrow[t=3]{t=3\text{s}} 0 = a(3 - 1)^2 - 4 \Rightarrow 4 = 4a \Rightarrow a = 1$$

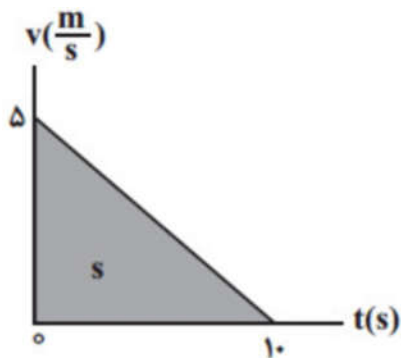
$$v = 1 \times (t - 1)^2 - 4 \Rightarrow v = t^2 - 2t - 3$$

اکنون سرعت متحرک را در ابتدا و انتهای ثانیه پنجم، می‌یابیم:

$$v = t^2 - 2t - 3 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 4 \text{ s} \Rightarrow v_1 = 16 - 8 - 3 = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ t_2 = 5 \text{ s} \Rightarrow v_2 = 25 - 10 - 3 = 12 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{cases}$$

$$a_{\text{av}} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{12 - 5}{5 - 4} \Rightarrow a_{\text{av}} = 7 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانیم سطح محصور بین نمودار سرعت - زمان و محور زمان برابر جابه‌جایی متحرک است. بنابراین با توجه به این‌که $x_1 = -21\text{ m}$ است، با استفاده از مساحت زیر نمودار سرعت - زمان، مکان متحرک را در لحظه $t = 10\text{ s}$ می‌یابیم و سپس شتاب آن را پیدا می‌کنیم:



$$\Delta x = s = \frac{10 \times 5}{2} = 25\text{ m}$$

$$\Delta x = x_1 - x_0 \Rightarrow 25 = x_1 - (-21) \Rightarrow x_1 = 4\text{ m}$$

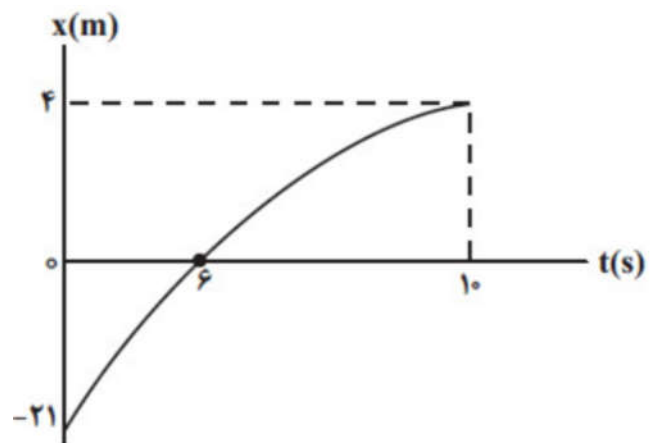
$$a = \frac{v - v_0}{\Delta t} = \frac{0 - 5}{10 - 0} = -\frac{1}{2} \frac{m}{s^2}$$

اکنون با داشتن x ، v ، a ، معادله مکان - زمان را می‌نویسیم و لحظه‌ای را که متحرک از مکان $x = 0$ عبور می‌کند، می‌یابیم:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \xrightarrow[v_0 = 5 \frac{m}{s}, x_0 = -21\text{ m}]{v_0 = 5 \frac{m}{s}} x = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right)t^2 + 5t - 21$$

$$\xrightarrow{x=0} 0 = -\frac{1}{4}t^2 + 5t - 21 \Rightarrow t^2 - 20t + 84 = 0 \Rightarrow (t - 14)(t - 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 6\text{ s} \\ t = 14\text{ s} \end{cases}$$

در آخر با رسم نمودار مکان - زمان، از روی نمودار مدت زمانی را که متحرک در حال دور شدن از مبدأ است، پیدا می‌کنیم، با توجه به نمودار، متحرک در بازه زمانی صفر تا 6 s به مبدأ مکان نزدیک و از لحظه $t = 6\text{ s}$ تا لحظه $t = 10\text{ s}$ که سرعت آن صفر می‌شود، به مدت $\Delta t = 10 - 6 = 4\text{ s}$ از مبدأ مکان دور می‌شود.



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل، متحرک‌های A و B، در مبدأ زمان در دو جهت مخالف از مبدأ مکان عبور می‌کنند و تا لحظه t' از یکدیگر دور می‌شوند. پس از لحظه t' ، تا لحظه t'' که دو متحرک به هم می‌رسند، در حال نزدیک شدن به یکدیگرند. بنابراین، ابتدا لحظه‌های t' و t'' را می‌یابیم. به همین منظور با محاسبه شتاب متحرک‌ها، معادلات سرعت - زمان و مکان - زمان آن‌ها را می‌نویسیم و با مساوی قرار دادن معادلات سرعتشان، t' و با مساوی قرار دادن معادلات مکانشان، t'' را به دست می‌آوریم. دقت کنید، در لحظه t' سرعت متحرک‌ها یکسان و در لحظه t'' مکان آن‌ها یکسان است.

$$a_A = \frac{\Delta v_A}{\Delta t_A} = \frac{0 - 20}{5 - 0} \Rightarrow a_A = -4 \frac{m}{s^2}$$

$$a_B = \frac{\Delta v_B}{\Delta t_B} = \frac{0 - (-20)}{20 - 0} \Rightarrow a_B = 1 \frac{m}{s^2}$$

$$v = at + v_0 \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{v_{A0} = 20 \frac{m}{s}} v_A = -4t + 20 \\ \xrightarrow{v_{B0} = -20 \frac{m}{s}} v_B = t - 20 \end{cases}$$

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{x_{A0} = 0} x_A = \frac{1}{2}(-4)t^2 + 20t + 0 \Rightarrow x_A = -2t^2 + 20t \\ \xrightarrow{x_{B0} = 0} x_B = \frac{1}{2} \times 1 \times t^2 - 20t + 0 \Rightarrow x_B = \frac{1}{2}t^2 - 20t \end{cases}$$

$$t = t' \Rightarrow v_A = v_B \Rightarrow -4t' + 20 = t' - 20 \Rightarrow 40 = 5t' \Rightarrow t' = 8s$$

$$t = t'' \Rightarrow x_A = x_B \Rightarrow -2t''^2 + 20t'' = \frac{1}{2}t''^2 - 20t'' \Rightarrow \frac{5}{2}t''^2 - 40t'' = 0 \Rightarrow t'' \left(\frac{5}{2}t'' - 40 \right) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{5}{2}t'' - 40 = 0 \Rightarrow t'' = 16s \\ t'' = 0 \end{cases}$$

با داشتن t' و t'' ، اکنون می‌توان مسافت طی شده در بازه زمانی t' و t'' که دو متحرک به یکدیگر نزدیک می‌شوند را به دست آورد. بنابراین، با توجه به این‌که، در نمودار سرعت - زمان، مساحت محصور بین نمودار و محور زمان برابر جابه‌جایی متحرک است، به صورت زیر، مسافت طی شده را می‌یابیم. البته قبل از آن لازم است، سرعت هریک از متحرک‌ها را در لحظه‌های t' و t'' به دست آوریم. در ضمن در لحظه t' ، سرعت دو متحرک یکسان است.

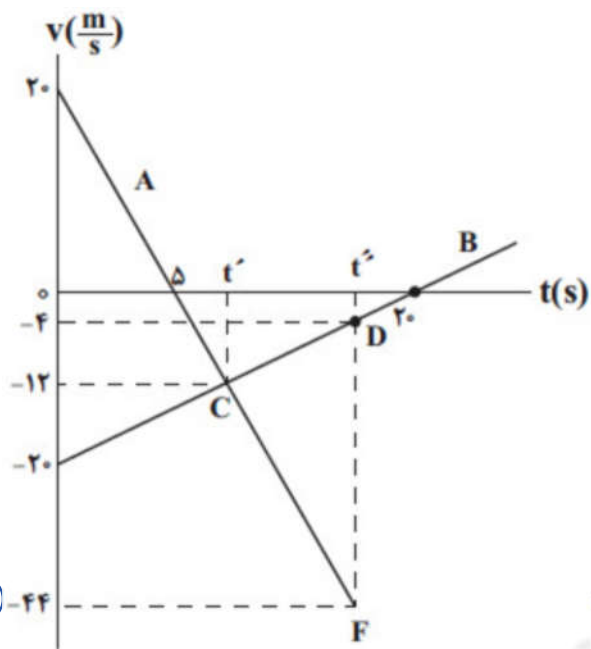
$$v_A = v_B = -4t' + 20 \xrightarrow{t' = 8s} v_A = v_B = -4 \times 8 + 20 \Rightarrow v_A = v_B = -12 \frac{m}{s}$$

$$v_A = -4t'' + 20 \xrightarrow{t'' = 16s} v_A = -4 \times 16 + 20 = -44 \frac{m}{s}$$

$$v_B = t'' - 20 \xrightarrow{t'' = 16s} v_B = 16 - 20 = -4 \frac{m}{s}$$

$$L = L_A + L_B \Rightarrow L = t't''CF \text{ مساحت ذوزنقه } + t't''CD \text{ مساحت ذوزنقه}$$

$$L = \frac{(12 + 44)}{2} \times (16 - 8) + \frac{(12 + 4)}{2} \times (16 - 8) \Rightarrow L = (56 \times 8) + (8 \times 8) \Rightarrow L = 544m$$



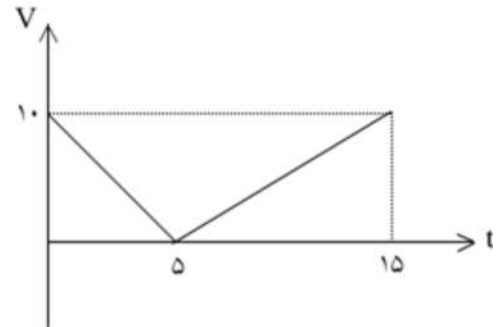
گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

الف) جهت بردار سرعت عوض نمی‌شود. ولی جهت بردار مکان ۱ بار عوض می‌شود.

ب) (چون جهت حرکت) $\Delta x = L$ عوض نمی‌شود.

$$a_{av} = \frac{\Delta V}{\Delta t} = 0 \quad \text{پ)}$$

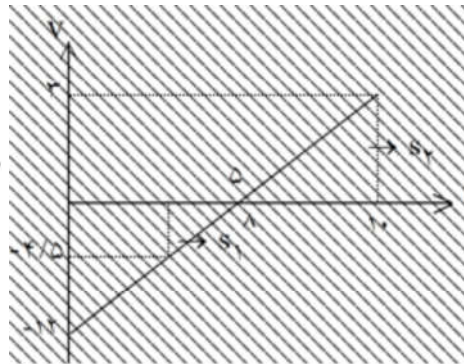
ت) $\Delta x \neq 0 \Rightarrow v_{av} \neq 0$



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به اینکه سؤال از ما تندی متوسط را خواسته باید ابتدا با کمک نمودار سرعت زمان، مسافت را محاسبه کنیم.

$$x = \left(\frac{3}{2}\right)t^2 - 12t + 48 \Rightarrow V = \frac{3}{2}t - 12 \quad \text{رسم}$$

$$\frac{1}{2}a \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} V=0 \Rightarrow t=8 \\ t=10 \Rightarrow V=3 \\ t=8 \Rightarrow V=-4/5 \end{cases}$$

$$\text{مسافت طی شده} = |S_1| + |S_2| \Rightarrow \frac{4/5 \times 3}{2} + \frac{2 \times 3}{2} = 9/5$$

$$S_{av} = \frac{L}{t} = \frac{9/5}{2} = 1/4$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به اینکه متحرک روی محور x با شتاب ثابت حرکت می‌کند، نمودار مکان - زمان

آن یک سهمی خواهد بود و رأس سهمی در لحظه $t = 2/5s$ است. بنابراین از $t = 0$ تا $t = 2/5s$ حرکت کندشونده و از

$t = 2/5s$ تا $t = 3s$ حرکت تندشونده خواهد بود.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا با توجه به انرژی جنبشی گلوله، تندی آنرا دو ثانیه قبل از برخورد به زمین محاسبه

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow 32 = \frac{1}{2} \times 40 \times 10^{-2} \times v^2 \Rightarrow v = 40 \frac{m}{s}$$

می‌کنیم:

اگر جهت مثبت را به سمت پایین و کل زمان سقوط گلوله تا رسیدن به زمین را t در نظر بگیریم، طبق صورت سؤال در لحظه $t_2 = (t - 2)s$ سرعت گلوله برابر با $v_2 = 40 \frac{m}{s}$ است. از طرفی سه ثانیه آخر حرکت بازه زمانی بین لحظه‌های $t_1 = (t - 3)s$ تا $t_2 = (t - 2)s$ است. سرعت گلوله را در لحظه‌های t_1 و t_2 می‌یابیم. داریم:

$$\xrightarrow{t_1 = (t-3)s} v_1 = g(t - 3) = g(t - 2 - 1) = g(t - 2) - g \Rightarrow v_1 = 40 - 10 \Rightarrow v_1 = 30 \frac{m}{s}$$

$$\xrightarrow{t_2 = (t-2)s} v_2 = g(t - 2) = g(t - 2 + 2) = g(t - 2) + 2g \Rightarrow v_2 = 40 + 20 \Rightarrow v_2 = 60 \frac{m}{s}$$

حال با استفاده از تعریف سرعت متوسط در حرکت با شتاب ثابت داریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{v_1 + v_2}{2} \Rightarrow \frac{\Delta y}{3} = \frac{30 + 60}{2} \Rightarrow \Delta y = 135m$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا مسافت طی شده توسط متحرک در بازه زمانی که با شتاب $\frac{2}{s^2}$ در حال حرکت است را

به دست می‌آوریم، با توجه به رابطه مستقل از زمان $(v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x)$ داریم:

$$l_1 = 2 \times \left| \frac{0 - 10^2}{2 \times 2} \right| + 75 = 125m$$

اکنون سرعت متحرک را در لحظه‌ای که از مکان $x = 75m$ عبور می‌کند، به دست می‌آوریم:

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \xrightarrow{\substack{v_0 = 10 \frac{m}{s}, a = 2 \frac{m}{s^2} \\ \Delta x = 75m}} v^2 = 300 + 100 = 400 \Rightarrow v = 20 \frac{m}{s}$$

در لحظه‌ای که متحرک با شتاب $\frac{4}{s^2}$ از مکان $x = 125m$ عبور می‌کند تندی را به دست می‌آوریم:

$$v'^2 - 20^2 = 2(-4)(125 - 75) \Rightarrow v' = 0$$

بنابراین متحرک تا لحظه‌ای که از مکان $x = 125m$ می‌گذرد، دو بار متوقف می‌شود، یک بار در بازه زمانی که با شتاب ۲ حرکت می‌کند و یک بار در مکان $x = 125m$.

بنابراین کل مسافت طی شده توسط متحرک از مبدأ زمان تا لحظه توقف برای دومین بار برابر است با:

$$L = 125 + (125 - 75) = 175m$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$d : 20s \times 9 \frac{cm}{s} = 180cm$$

$$d : l_{کر} + l_{ول} + 8cm = 180cm \xrightarrow{l_{کر} = 12cm} l_{ول} = 160cm = 1/6m$$

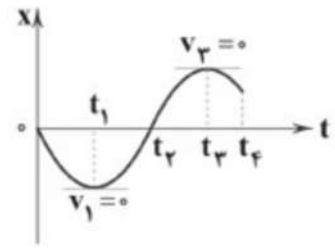
گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$v_{av} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3} = \frac{v_1 \Delta t_1 + v_2 \Delta t_2 + v_3 \Delta t_3}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3}$$

$$\Rightarrow v_{av} = \frac{(10 \times 60) + (25 \times 20) + ((-5) \times 5)}{60 + 20 + 5} = \frac{1075}{85} = \frac{215}{17} \frac{m}{s}$$

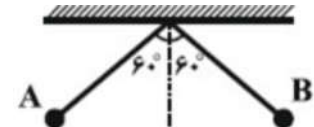
۱۷۷

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در بازه‌های صفر تا t_1 و t_2 تا t_3 نمودار $x-t$ نزولی است و سرعت متحرک منفی می‌باشد، اما در بازه‌ی صفر تا t_1 بزرگی سرعت متحرک کاهش یافته و در بازه‌ی t_2 تا t_3 بزرگی سرعت متحرک (یا همان شیب خط‌های مماس) افزایش می‌یابد.



۱۷۸

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



بر اساس تعریف سرعت متوسط داریم:

$$\sin \alpha = \frac{d}{r} \Rightarrow d = r \sin \alpha$$

$$d = v_{av} t \Rightarrow r \sin \alpha = 1/5 \times 2 \Rightarrow r \sin 60^\circ = 1/5 \Rightarrow r = \frac{2}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} m$$

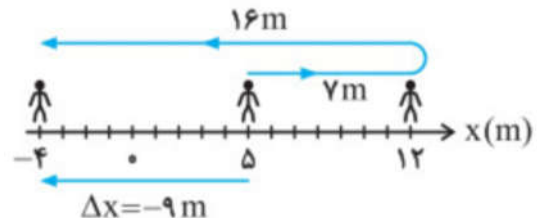
حال بر اساس تعریف تندی متوسط، چون گلوله آونگ $\frac{1}{3}$ محیط دایره را طی می‌کند، می‌توان

$$l = \frac{2\pi r}{3} \quad \text{نوشت:}$$

$$s_{av} = \frac{l}{t} = \frac{\frac{2\pi r}{3}}{2} = \frac{\pi \sqrt{3}}{3} \Rightarrow s_{av} = \frac{\sqrt{3}}{3} \pi \frac{m}{s}$$

۱۷۹

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. برای تعیین جابه‌جایی و مسافت طی شده ابتدا شکل زیر را رسم می‌کنیم و وضعیت شخص را در طی این حرکت مشخص می‌کنیم.

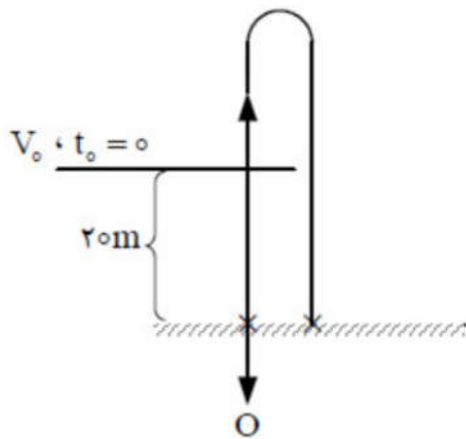


مطابق شکل، مسافت طی شده برابر مجموع طول پاره‌خطهایی است که شخص طی کرده که مطابق شکل برابر

$L = 7 + 16 = 23 m$ ، اما جابه‌جایی برداری است که موقعیت ابتدایی ($x = +5 m$) را به موقعیت پایانی شخص $x = -4 m$

متصل می‌کند که مطابق شکل داریم: $\Delta x = -4 - 5 = -9 m$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مختصات O نسبت به نقطه پرتاب $O \left| \begin{matrix} t = 6s \\ h = -20 \end{matrix} \right.$



$$h = \frac{-1}{2}gt^2 + V_0 t$$

$$-20 = \frac{1}{2} \times (-10) \times 6^2 + V_0 \times 6 \Rightarrow \frac{-20 + 180}{6} = V_0$$

$$\Rightarrow V_0 = \frac{160}{6} \frac{m}{s}$$

$$V = -gt + V_0 \Rightarrow V = -10 \times 6 + \frac{160}{6} = \frac{-180 + 160}{6}$$

$$V = \frac{-20}{6} \frac{m}{s}$$

$$h = \frac{V_0^2}{2g} \text{ ارتفاع اوج}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۸۱

$$\frac{h}{h'} = \frac{\frac{V_0^2}{2g}}{\frac{V_0'^2}{2g}} \Rightarrow \frac{h}{h'} = \frac{1}{4} \Rightarrow h' = 4h$$

$$h' = \frac{V_0'^2}{2g}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۸۲

$$V_0 = -10 \frac{m}{s} \quad a = \frac{V - V_0}{t} = \frac{0 - (-10)}{5} = 2 \frac{m}{s^2}$$

$$x = \frac{1}{2}at^2 + V_0 t \Rightarrow x = t^2 - 10t \Rightarrow x = 50m$$

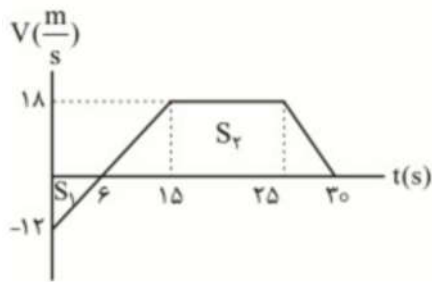
$$t^2 - 10t - 50 = 0 \Rightarrow a^2 - bt - c = 0$$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \times 1 \times (-50)}}{2} = \frac{10 \pm 30}{2} \begin{cases} t = -5s \text{ غ} \\ t = 20s \text{ ص} \end{cases}$$

زمان همواره مثبت است.

$$V - V_0 = at \Rightarrow V = 2 \times 20 + (-10) = 30 \frac{m}{s}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. از لحظه‌ی $t = ۰$ تا $t = ۱۵s$ شیب ثابت است:



$$\frac{۰ - (-۱۲)}{۶ - ۰} = \frac{V_{۱۵} - ۰}{۱۵ - ۶} \Rightarrow ۲ = \frac{V_{۱۵}}{۹} \Rightarrow V_{۱۵} = ۱۸ \frac{m}{s}$$

$$\text{کل مسافت پیموده شده} = L = |S_1| + |S_r| = \left| \frac{-۱۲ \times ۶}{۲} \right| + (۱۰ + ۲۴) \times \frac{۱۸}{۲} = ۳۶ + ۳۰۶$$

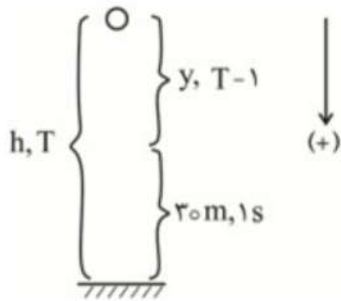
$$L = ۳۴۲ m$$

در دو بازه‌ی زمانی ۰ تا ۶ ثانیه و ۲۵ تا ۳۰ ثانیه، حرکت، کندشونده است:

$$\text{مسافت کندشونده} = L_1 = |S_1| + \frac{۱۸ \times ۵}{۲} = ۳۶ + ۴۵ = ۸۱ m$$

$$\frac{L}{L_1} = \frac{۳۴۲}{۸۱} = \frac{۳۸}{۹}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. جهت رو به پایین را مثبت در نظر می‌گیریم



$$h = \frac{1}{2} g T^2 = \Delta T^2$$

$$y = \frac{1}{2} g (T-1)^2 = \Delta (T-1)^2$$

$$\frac{h - y = \Delta T^2 - \Delta (T-1)^2}{\Delta T^2 - \Delta (T-1)^2}$$

$$۳۰ = \Delta T^2 - \Delta (T-1)^2$$

$$۶ = T^2 - (T^2 - ۲T + ۱) = ۲T - ۱ \Rightarrow ۷ = ۲T$$

$$T = ۳.۵ s$$

$$h = \Delta T^2 = \Delta (۳.۵)^2 = \Delta \times ۱۲.۲۵ = ۶۱.۲۵ m$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. زمان ۶ صبح را $t = 0$ و پایانه A را $x = 0$ در نظر می‌گیریم. چون سرعت ثابت است، پس زمان رسیدن قطار اول به پایانه B برابر است با:

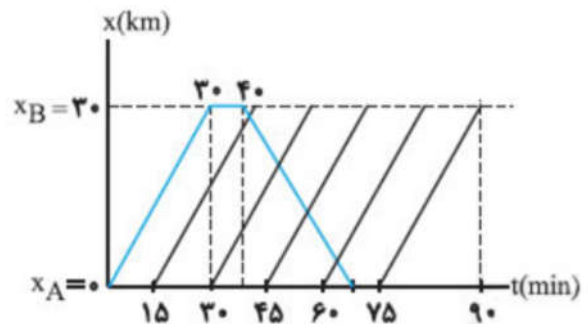
$$\Delta x = v \Delta t \xrightarrow[v = 6 \frac{\text{km}}{\text{h}}]{\Delta x = 30 \text{ km}} \Delta t = \frac{30}{6} = \frac{1}{2} \text{ h} = 30 \text{ min}$$

قطار اول ۱۰ دقیقه در پایانه B توقف می‌کند و دوباره ۳۰ دقیقه طول می‌کشد تا به پایانه A برگردد.

$$t_R = 30 + 10 + 30 = 70 \text{ min}$$

حال نمودار مکان زمان قطارها را رسم می‌کنیم تا پاسخ مسئله را بیابیم.

مطابق نمودار، نمودار مکان - زمان قطار اول (ذوزنقه) با نمودار قطارهای ۲، ۳، ۴ و ۵ برخورد می‌کند پس قطار اول با ۴ قطار دیدار می‌کند.



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به رابطه‌ی تندی متوسط داریم:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} \Rightarrow 15 = \frac{\frac{r}{4} \times (2\pi)}{4} \Rightarrow 80 = 2 \times 2 \times r \Rightarrow r = \frac{80}{4} = \frac{40}{3} \text{ m}$$

بزرگی سرعت متوسط متحرک برابر است با:

$$A \bullet \frac{40}{3} \text{ m}$$

$$d = \frac{40\sqrt{2}}{3} \text{ m}$$

$$B \bullet \frac{40}{3} \text{ m}$$

$$v_{av} = \frac{d}{\Delta t} = \frac{40\sqrt{2}}{3 \times 4} = \frac{10\sqrt{2}}{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. معادله‌ی مکان - زمان هر کدام از متحرک‌ها را به دست می‌آوریم:

$$A \text{ متحرک: } x_A = v_A t + x_{A_0} \xrightarrow{v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = 2 \frac{m}{s}} x_A = 2t + 4$$

$$B \text{ متحرک: } x_B = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_{B_0}$$

$$x_{B_0} = -12 \text{ m} \rightarrow \begin{cases} \xrightarrow[t=x_0]{t=9s} 0 = \frac{1}{2}a \times 9^2 + 9v_0 - 12 \\ \xrightarrow[t=x_0]{t=18s} 20 = \frac{1}{2}a \times 18^2 + 18v_0 - 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \frac{m}{s^2} \\ v_0 = -4 \frac{m}{s} \end{cases}$$

$$x_B = t^2 - 4t - 12$$

بنابراین معادله‌ی مکان - زمان متحرک B برابر است با:

با توجه به نمودار که سرعت متحرک A در جهت محور x است و سرعت اولیه‌ی متحرک B در خلاف جهت محور x است، در ابتدا دو متحرک از هم دور می‌شوند، پس از مدتی متحرک B متوقف شده و تغییر جهت داده و در همان جهت حرکت متحرک A حرکت می‌کند، ولی هم‌چنان فاصله‌ی آن‌ها از هم زیاد می‌شود تا لحظه‌ای که سرعت متحرک B با سرعت متحرک A برابر شود، از این پس فاصله‌ی آن‌ها از هم کم می‌شود. پس بیشترین فاصله‌ی آن‌ها در لحظه‌ای خواهد بود که سرعت متحرک B با سرعت متحرک A برابر باشد.

$$\begin{cases} B \text{ متحرک: } v_B = at + v_{B_0} = 2t - 4 \\ A \text{ متحرک: } v_A = 2 \frac{m}{s} \end{cases} \Rightarrow 2t - 4 = 2 \Rightarrow t = 3s$$

در این لحظه داریم:

$$\begin{cases} x_A = 2t + 4 \xrightarrow{t=3s} x_A = 10 \text{ m} \\ x_B = t^2 - 4t - 12 \xrightarrow{t=3s} x_B = -15 \text{ m} \end{cases} \Rightarrow \text{فاصله: } d = |x_B - x_A| = 25 \text{ m}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا به کمک مساحت محصور بین نمودار شتاب - زمان و محور زمان، تغییرات سرعت هر متحرک را در هر مرحله‌ی شتاب ثابت به دست می‌آوریم.

متحرک A:

$$t = 4s \text{ تا } t = 0 : S = 8 \Rightarrow \Delta v = 8 \frac{m}{s} \Rightarrow v_f - v_i = 8 \xrightarrow{v_i=0} v_f = 8 \frac{m}{s}$$

$$t = 12s \text{ تا } t = 4s : S = -8 \Rightarrow \Delta v = -8 \frac{m}{s} \Rightarrow v_{12} - v_f = -8 \xrightarrow{v_f=8 \frac{m}{s}} v_{12} = 0$$

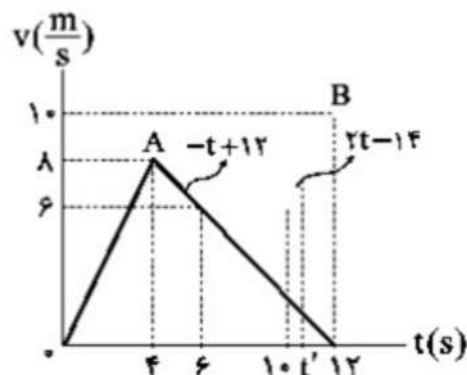
متحرک B:

$$t = 6s \text{ تا } t = 0 : S = 6 \Rightarrow \Delta v = 6 \frac{m}{s} \Rightarrow v_f - v_i = 6 \xrightarrow{v_i=0} v_f = 6 \frac{m}{s}$$

$$t = 10s \text{ تا } t = 6s : S = 0 \Rightarrow \Delta v = 0 \Rightarrow v_{10} - v_f = 0 \xrightarrow{v_f=6 \frac{m}{s}} v_{10} = 6 \frac{m}{s}$$

$$t = 12s \text{ تا } t = 10s : S = 4 \Rightarrow \Delta v = 4 \frac{m}{s} \Rightarrow v_{12} - v_{10} = 4 \xrightarrow{v_{10}=6 \frac{m}{s}} v_{12} = 10 \frac{m}{s}$$

در ادامه، نمودار سرعت - زمان دو متحرک را با هم رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار بالا، مشخص است که از لحظه‌ی $t = 0$ تا $t = 6s$ ، جابه‌جایی متحرک A بیشتر از متحرک B است و

متحرک A جلوتر از متحرک B قرار دارد. پس در لحظه‌ی $t = 6s$ که سرعت دو متحرک یکسان شده است، متحرک B فاصله‌ی خود را از متحرک A کم می‌کند تا در لحظه‌ی t' به متحرک A رسیده و از آن سبقت بگیرد. با دقت به سطح زیر نمودارها، می‌توان فهمید که $10s < t' < 12s$ است.

برای این‌که در لحظه‌ی t متحرک‌های A و B هم‌مکان شوند باید از لحظه‌ی $t = 0$ تا لحظه‌ی t' $\Delta x_A = \Delta x_B$ باشد، پس به کمک سطح زیر نمودار سرعت - زمان داریم:

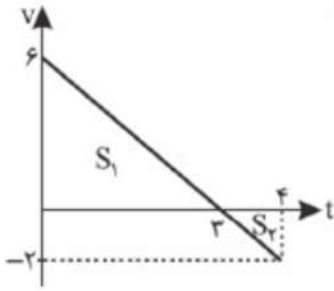
$$\frac{4 \times 8}{2} + \frac{(8 + 12 - t')(t' - 4)}{2} = \frac{(4 + 10) \times 6}{2} + \frac{(2t' - 14 + 6)(t' - 10)}{2} \Rightarrow 3t'^2 - 52t' + 212 = 0$$

$$\Rightarrow t' = \frac{52 \pm 4\sqrt{10}}{6} \xrightarrow{t' > 10s} t' = \frac{52 + 4\sqrt{10}}{6} \xrightarrow{\sqrt{10} \approx 3.16} t' = 10.8s$$

دقت کنید: در معادله‌ی $3t'^2 - 52t' + 212 = 0$ ، به‌ازای $t' = 10s$ و $t' = 11s$ مقادیر هم‌علامت نمی‌شوند و می‌توان نتیجه

گرفت $10s < t' < 11s$ بوده که فقط گزینه‌ی (۴) درست است.

بهترین روش برای حل این مسأله رسم نمودار سرعت - زمان است.



$$L = |S_1| + |S_2|$$

$$= \frac{6 \times 3}{2} + \frac{1 \times 2}{2} = 10.5 \text{ m}$$

$$d = s_1 - s_2 = 9 - 1 = 8 \text{ m}$$

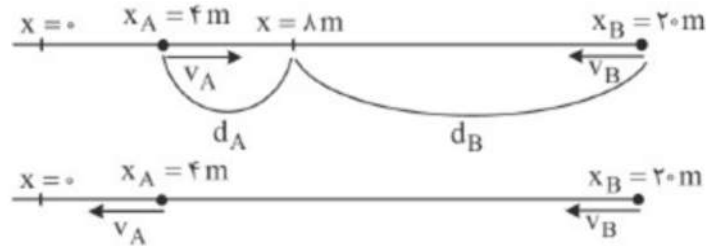
$$\frac{S_{av}}{V_{av}} = \frac{L}{d} = \frac{10}{8} = 1.25$$

در قسمت اول:

$$\begin{cases} |d_A| = v_A \times t \Rightarrow |8 - 4| = |v_A| \times t \\ |d_B| = v_B \times t \Rightarrow |8 - 20| = |v_B| \times t \\ \Rightarrow \frac{|v_A|}{|v_B|} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

در قسمت دوم اگر فرض کنیم دو متحرک در مکان x به هم برسند، داریم:

$$\begin{cases} x - 4 = v_A \times t \Rightarrow \frac{x - 4}{x - 20} = \frac{v_A}{v_B} = \frac{1}{3} \\ x - 20 = v_B \times t \Rightarrow \frac{x - 4}{x - 20} = \frac{v_A}{v_B} = \frac{1}{3} \\ 3x - 12 = x - 20 \Rightarrow 2x = -8 \Rightarrow x = -4 \text{ m} \end{cases}$$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در لحظه $t = 2 \text{ s}$ که شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان صفر می‌باشد، سرعت متحرک

صفر است. از طرف دیگر، چون در بازه زمانی صفر تا 4 s تقعر نمودار $x - t$ به طرف پایین است. شتاب متوسط متحرک

منفی است. بنابراین، با استفاده از رابطه شتاب متوسط داریم:

$$a_{av} = \frac{v_{fs} - v_{is}}{\Delta t} = \frac{0 - (-2)}{4 - 0} = \frac{2}{4} = 0.5 \text{ m/s}^2$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا تندی متحرک‌های A و B را می‌یابیم:

$$x_A = v_A t + x_{A,0} \xrightarrow[t_{A=0}]{t=5s} 0 = v_A \times 5 + x_{A,0} \Rightarrow x_{A,0} = -5v_A$$

$$x_B = v_B t + x_{B,0} \xrightarrow[t_{B=0}]{t=5s} 0 = v_B \times 5 + x_{B,0} \Rightarrow x_{B,0} = -5v_B$$

از طرف دیگر، با توجه به داده‌های روی نمودار $x_B - x_A = 4m$ است. بنابراین داریم:

$$x_{B,0} - x_{A,0} = 4 \Rightarrow -5v_B - (-5v_A) = 4 \xrightarrow[v_B = \frac{1}{5}v_A]{v_B = \frac{1}{5}v_A} -5 \times \frac{1}{5}v_A + 5v_A = 4$$

$$\Rightarrow -1/5 v_A + 5v_A = 4 \Rightarrow 4/5 v_A = 4 \Rightarrow v_A = 5 \frac{m}{s}, v_B = \frac{1}{5}v_A = \frac{1}{5} \times 5 = 1 \frac{m}{s}$$

اکنون لحظه به هم رسیدن دو متحرک به یکدیگر را پیدا می‌کنیم:

$$x_A = x_B \Rightarrow v_A t + x_{A,0} = v_B t + x_{B,0} \Rightarrow 5t + x_{A,0} = 1t + x_{B,0}$$

$$5t = x_{B,0} - x_{A,0} \xrightarrow[x_{B,0} - x_{A,0} = 4m]{x_{B,0} - x_{A,0} = 4m} 5t = 4 \Rightarrow t = 0.8s$$

در این قسمت مکانی را که دو متحرک به هم می‌رسند، می‌یابیم:

$$x_A = v_A t + x_{A,0} \xrightarrow[t=0.8s]{x_{A,0} = -5v_A} x_A = v_A \times 0.8 - 5v_A = -4v_A$$

$$\xrightarrow[v_A = 5 \frac{m}{s}]{v_A = 5 \frac{m}{s}} x_A = -4 \times 5 = -20m$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در حرکت با شتاب ثابت در مسیری مستقیم، جابه‌جایی از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

ثانیه‌ی پنجم یعنی بازه‌ی زمانی $t_1 = 4s$ تا $t_2 = 5s$ برای محاسبه‌ی جابه‌جایی در ثانیه‌ی پنجم، سرعت را در لحظه‌های

$t_1 = 4s$ و $t_2 = 5s$ به‌دست می‌آوریم. داریم:

$$v = at + v_0 \xrightarrow[t_{v_0=18 \frac{m}{s}}]{t=4s} v_1 = 4a + 18$$

$$v = at + v_0 \xrightarrow[t_{v_0=18 \frac{m}{s}}]{t=5s} v_2 = 5a + 18$$

در ثانیه‌ی پنجم جابه‌جایی برابر با صفر است، بنابراین:

$$\Delta x = 0 \Rightarrow v_1 + v_2 = 0 \Rightarrow 4a + 18 + 5a + 18 = 0 \Rightarrow a = -4 \frac{m}{s^2}$$

برای محاسبه‌ی مسافت طی شده در ۱۰ ثانیه‌ی ابتدایی حرکت، جابه‌جایی متحرک را در لحظات قبل و بعد از آن‌که

سرعتش صفر شود، محاسبه می‌کنیم. داریم:

$$v = at + v_0 \Rightarrow v = -4t + 18 = 0 \Rightarrow t = 4.5s$$

$$\Delta x_1 = \frac{v_0 + v'}{2} \Delta t_1 = \frac{18 + 0}{2} \times (4.5 - 0) \Rightarrow \Delta x_1 = \frac{81}{2} m$$

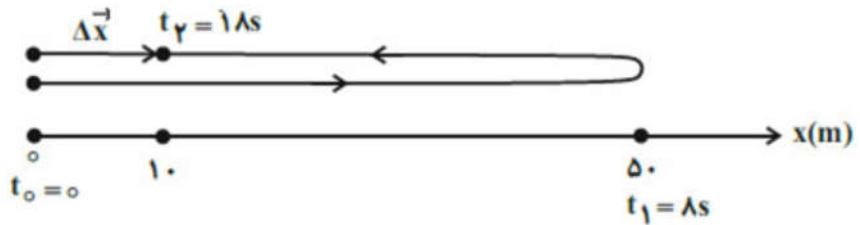
$$v'' = -4 \times 10 + 18 \Rightarrow v'' = -22 \frac{m}{s}$$

$$\Delta x_2 = \frac{v' + v''}{2} \Delta t_2 = \frac{0 + (-22)}{2} (10 - 4.5) \Rightarrow \Delta x_2 = -\frac{121}{2} m$$

$$\text{مسافت طی شده} = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| = \frac{81}{2} + \frac{121}{2} = 101m$$

بنابراین:

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مطابق شکل زیر، فرض می‌کنیم متحرک در مبدأ زمان در مبدأ مکان و پس از $8s$ مسافت $50m$ را طی می‌کند و در مکان $x_1 = 50m$ قرار می‌گیرد و پس از $10s$ بعد از آن که مسافت $40m$ را در خلاف جهت اولیه طی می‌کند در مکان $x_2 = 10m$ قرار دارد. بنابراین مسافت طی شده توسط متحرک برابر $L = 50 + 40 = 90m$ و جابه‌جایی آن برابر $\Delta x = 10 - 0 = 10m$ خواهد بود. در این حالت داریم:



$$\begin{cases} s_{av} = \frac{L}{\Delta t} \\ |v_{av}| = \frac{|\Delta x|}{\Delta t} \end{cases} \xrightarrow{\Delta t \text{ یکسان است}} \frac{s_{av}}{|v_{av}|} = \frac{L}{|\Delta x|} = \frac{90}{10} = 9$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بررسی گزاره‌ها:

(آ) درست

(ب) درست، با توجه به رابطه سرعت متوسط، بردار سرعت متوسط و بردار جابه‌جایی با یکدیگر هم‌جهت‌اند. (Δt همواره

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} \text{ مثبت است})$$

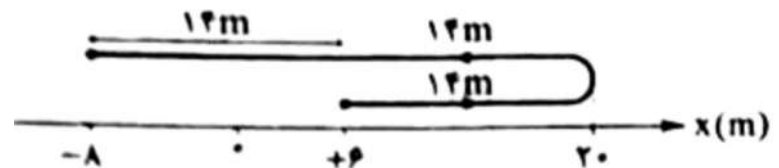
(پ) درست، اگر تندی لحظه‌ای متحرک در یک بازه زمانی صفر نشود، در این بازه جهت حرکت متحرک تغییر نکرده و بنابراین بزرگی جابه‌جایی و مسافت طی شده با یکدیگر برابرند و مطابق رابطه تندی متوسط و بزرگی سرعت متوسط این دو کمیت نیز با یکدیگر برابرند.

(ت) نادرست - بردار سرعت لحظه‌ای به جهت حرکت متحرک بستگی دارد و الزاماً هم‌جهت با بردار مکان نیست.

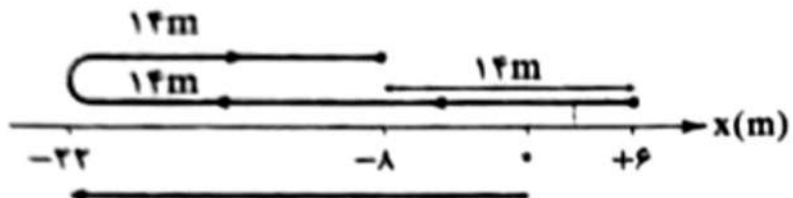
گزینه ۲ پاسخ صحیح است. طبق اطلاعات داده شده در جدول داریم:

$$\begin{aligned} v_{av} &= \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow -2 = \frac{-8 - \varphi}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = 4s \\ s_{av} &= \frac{l}{\Delta t} \Rightarrow \varphi = \frac{l}{4} \Rightarrow l = 42m \end{aligned}$$

بنابراین متحرک مسافت $42m$ را طی کرده که دو حالت می‌تواند رخ دهد:
(الف) در این حالت، مکان در لحظه تغییر جهت $x = +20m$ است که در گزینه‌ها نیست.



در این حالت، مکان در لحظه تغییر جهت $x = -22m$ است.

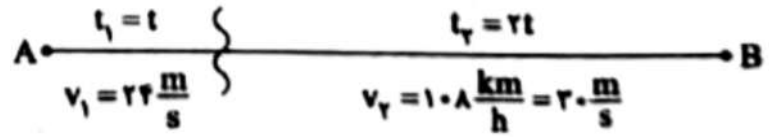


گزینه ۳ پاسخ صحیح است. معادله داده شده مربوط به حرکت با سرعت ثابت است، بنابراین:

$$\begin{cases} x = vt - 4 \\ x = vt + x_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = 3 \frac{m}{s} \\ x_0 = -4m \end{cases}$$

بنابراین متحرک در هر ثانیه $3m$ در جهت محور x حرکت می‌کند و در نتیجه اندازه جابه‌جایی آن در ۲ ثانیه پنجم برابر $6m$ و مسافت طی شده در ثانیه ششم برابر $3m$ است و نسبت آن‌ها برابر $\frac{6}{3} = 2$ می‌باشد.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل زیر می‌توان نوشت:



$$\Delta x_1 = v_1 t_1 \Rightarrow \Delta x_1 = 24t$$

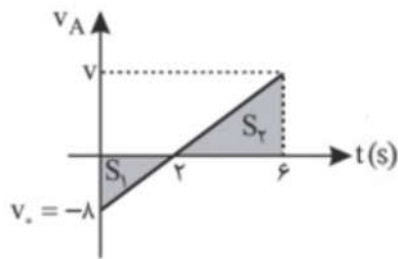
$$\Delta x_2 = v_2 t_2 \Rightarrow \Delta x_2 = 30 \times 2t = 60t$$

سرعت متوسط کل برابر است با:

$$v_{av\text{کل}} = \frac{\Delta x_{\text{کل}}}{\Delta t_{\text{کل}}} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{2t} = \frac{24t + 60t}{2t} = \frac{84t}{2t} = 42 \frac{m}{s}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. گام اول: از لحظه‌ی $t = ۲s$ تا $t = ۶s$ متحرک A در جهت مثبت و متحرک B در جهت منفی حرکت می‌کند.

گام دوم: نمودار سرعت - زمان دو متحرک را رسم می‌کنیم:



$$۰ < t < ۲ \Rightarrow \Delta x_A = -\lambda$$

$$\Rightarrow \frac{v_* \times ۲}{۲} = -\lambda \Rightarrow v_* = -\lambda \frac{m}{s}$$

با تشابه مثلث‌ها داریم:

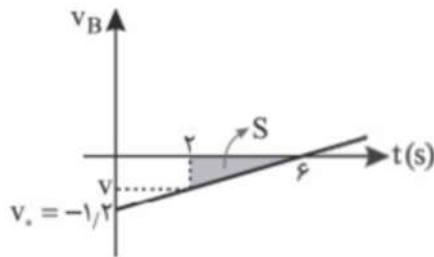
$$\frac{v}{۴} = \frac{\lambda}{۲} \Rightarrow v = ۱۶$$

$$۲ < t < ۶ \Rightarrow \Delta x_A = \frac{۴ \times ۱۶}{۲} = ۳۲m$$

$$t = ۲s \Rightarrow x_A = -\lambda m$$

$$t = ۶s \Rightarrow x_A = -\lambda + ۳۲ = ۲۴m$$

با رسم نمودار $v-t$ متحرک B داریم:



$$۰ < t < ۶$$

$$\Rightarrow \Delta x = -۳/۶ = \frac{v_* \times ۶}{۲} \Rightarrow v_* = -۱/۲ \frac{m}{s}$$

$$\frac{v}{۱/۲} = \frac{۴}{۶} \Rightarrow v = -۰/۸ \frac{m}{s}$$

$$۲s < t < ۶s \Rightarrow \Delta x_B = S = \frac{۴ \times ۰/۸}{۲} = -۱/۶m$$

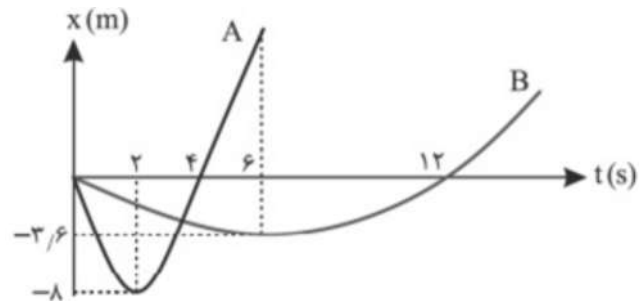
$$t = ۲s \Rightarrow x_B = -۲m$$

$$t = ۶s \Rightarrow x_B = -۳/۶$$

$$t = ۲s \Rightarrow \text{فاصله } d_1 = |x_A - x_B| = |-\lambda - (-۲)| = ۶m$$

$$t = ۶s \Rightarrow \text{فاصله } d_2 = |x_A - x_B| = |۲۴ - (-۳/۶)| = ۲۷/۶m$$

پس فاصله از $۶m$ به $۲۷/۶m$ رسیده و فاصله $۲۱/۶m$ زیاد شده است.



گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\text{در بازه زمانی ۵ تا ۱۰ ثانیه: } v = ۳t + ۱۰ \xrightarrow{t=۵s} v = ۳(۵) + ۱۰ = ۱۶ \frac{m}{s}$$

$$\text{در بازه زمانی ۱۰ تا ۱۵ ثانیه: } v = -۲t + ۲۵ \xrightarrow{t=۱۰s} v = -۲(۱۰) + ۲۵ = ۵ \frac{m}{s}$$

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{۵ - ۱۶}{۱۵ - ۵} = -۱ \frac{m}{s^2}$$