نام و نام خانوادگی :

عنوان آزمون : نمونه سوال فصل اول گسسته

دوازدهم

۱ نشان دهید که چرا مجموع دو عدد زوج همیشه زوج است؟

۲ عبارت زیر درست است یا غلط (نادرست) است؟ در صورت غلط بودن یک مثال نقض پیدا کنید.
اگر ۱ با هر عدد فردی جمع شود، نتیجه همیشه یک عدد زوج است.

۳ عبارت زیر درست است یا غلط (نادرست) است؟ در صورت غلط بودن یک مثال نقض پیدا کنید.
مجموع دو زاویه‌ی حادّه کمتر از ۱۸۰° است.

۴ عبارت زیر درست است یا غلط (نادرست) است؟ در صورت غلط بودن یک مثال نقض پیدا کنید.
هر مستطیلی یک مربع است.

۵ عبارت زیر درست است یا غلط (نادرست) است؟ در صورت غلط بودن یک مثال نقض پیدا کنید.
هر مربعی یک مستطیل است.

۶ در صورتی‌که حکم زیر قضیه‌ی کلی باشد، آن را اثبات کنید و در غیر این‌صورت برای نادرستی آن مثال نقض بیاورید:
مربع هیچ عدد صحیح صفر نیست.

۷ در صورتی‌که حکم زیر قضیه‌ی کلی باشد، آن را اثبات کنید و در غیر این‌صورت برای نادرستی آن مثال نقض بیاورید:
اگر $x > ۱$ ، آن‌گاه $x > ۲$

۸ در صورتی‌که حکم زیر قضیه‌ی کلی باشد، آن را اثبات کنید و در غیر این‌صورت برای نادرستی آن مثال نقض بیاورید:
اگر $x > ۲$ ، آن‌گاه $x > ۱$

۹ با استفاده از روش استدلالی برهان خلف، حکم زیر را ثابت کنید:
اگر $n^۲$ مضربی از ۳ باشد، نشان دهید که n نیز مضربی از ۳ است.

۱۰ آیا عدده بر ۲۲ بخش‌پذیر است؟

۱۱ نشان دهید اگر a، b و $c \neq ۰$ اعدا صحیح باشند، آن‌گاه $\mathrm{a}|\mathrm{b}$ اگر و تنها اگر $\mathrm{ac}|\mathrm{bc}$.

۱۲ عدد ۹۵۵۵ را به عوامل اول تجزیه کنید.

۱۳ نشان دهید که هر عدد طبیعی بزرگتر از ۱ را می‌توان به صورت حاصل‌ضرب یک مربع کامل و یک عدد صحیح بدون عامل مربع به‌جز ۱ (یعنی عددی که بر هیچ عدد مربعی جز ۱ قابل قسمت نباسد) نوشت.

۱۴ نشان دهید اگر a نسبت به b و c اول باشد، نسبت به bc هم اول خواهد بود.

۱۵ دو عدد a و b به صورت‌های مقابل نوشته شده‌اند: $a = ۷\mathrm{k} + ۵, b = ۷\mathrm{k}' - ۲$

دسته‌ی همنهشتی $a + ۲\mathrm{b}$ را به پیمانه‌ی ۷ مشخص کنید.

۱۶ اگر $a \equiv b$ (پیمانه‌ی m) و c عدد صحیح باشد، آن‌گاه $\mathrm{ac} \equiv \mathrm{bc}$ (پیمانه‌ی m).

۱۷ ثابت کنید که برای هر دو عدد صحیح a و b، $(a \pm b)^۲ \equiv a^۲ + b^۲$ (پیمانه‌ی ab)

۱۸ ثابت کنید $۲^{۱۱} - ۱$ بر ۲۳ تقسیم‌پذیر است.

۱۹ برای معادله‌ی سیاله‌ی زیر یا تمام جواب‌ها را به دست آورید و یا ثابت کنید جواب ندارد.

$$۲\mathrm{x} + ۵\mathrm{y} = ۱۱$$

۲۰ برای معادله‌ی سیاله‌ی زیر یا تمام جواب‌ها را به دست آورید و یا ثابت کنید جواب ندارد.

$$۲۱\mathrm{x} + ۱۴\mathrm{y} = ۱۴۷$$

۲۱ اگر x و y دو عدد حقیقی باشند، ثابت کنید: $x^۲ + y^۲ \geq ۲(x + y - ۱)$

۲۲ با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید اگر از حاصلضرب دو عدد فرد، یک واحد کم کنیم عدد حاصل بر ۲ بخش پذیر است.

۲۳ برای هر دو عدد حقیقی و مثبت x و y ثابت کنید: $\mathrm{xy} \leqslant \frac{۱}{۲}(x^۲ + y^۲)$

۲۴ برای هر دو عدد حقیقی و مثبت x و y ثابت کنید: $y^۲ + ۱ \geqslant ۲\mathrm{x}(y - x + ۱)$

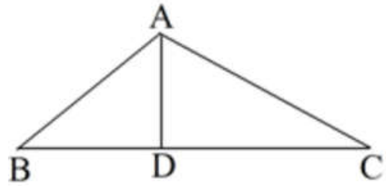
۲۵ می‌دانیم $\sqrt{۲}$ گنگ است. ثابت کنید $\sqrt{\sqrt{۲} + ۱}$ نیز گنگ است. (برهان خُلف)

۲۶ با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت کنید حاصل جمع دو عدد فرد، یک عدد زوج است.

۲۷ با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید: اگر به حاصل‌ضرب دو عدد فرد، ۱ واحد اضافه کنیم عددی زوج به‌دست می‌آید.

۲۸ می‌دانیم $\sqrt{۳}$ گنگ است، با استفاده از برهان خلف ثابت کنید $۷\sqrt{۳}$ گنگ است.

۲۹ فرض کنید AD نیمساز زاویه A در مثلث ABC باشد. اگر $\mathrm{CD} \neq \mathrm{DB}$ ثابت کنید: $\mathrm{AB} \neq \mathrm{AC}$ (برهان خلف).



۳۰ با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید اگر از مربع یک عدد فرد یک واحد کم کنیم، یک عدد زوج حاصل می‌شود.

۳۱ اگر n عدد طبیعی و $n^۲$ مضرب ۳ باشد، آنگاه نشان دهید که n مضرب ۳ است. (برهان خلف)

۳۲ به روش اثبات بازگشتی ثابت کنید: $x^۲ + y^۲ + ۱ \geqslant \mathrm{xy} + x + y$

۳۳ کدام‌یک از عبارت زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟ در صورت درست‌بودن آن را ثابت کنید و در صورت نادرست بودن یک مثال نقض پیدا کنید.
الف) مربع هر عدد حقیقی از مکعب آن کوچک‌تر است.
ب) حاصل ضرب هر دو عدد زوج، عددی زوج است.

۳۴ با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید، اگر به مربع یک عدد فرد ۳ واحد اضافه کنیم، عددی مضرب ۴ به‌دست می‌آید.

۳۵ با استفاده از برهان خلف ثابت کنید: اگر $x \neq ۴$ و $x^۳ + y^۳ = ۶۵$ ، آن‌گاه $y \neq ۱$ است.

۳۶ برای هر سه عدد حقیقی و مثبت a و b و c، ثابت کنید: $a^۲ + b^۲ + c^۲ + ۳ \geqslant ۲(a + b + c)$

۳۷ می‌دانیم $\sqrt{۳}$ عددی گنگ و $a^۲$ یک عدد گویا است. ثابت کنید $\sqrt{۳} + a^۲$ عدد گنگ است. (برهان خلف)

۳۸ می‌دانیم $\sqrt{۵}$ گنگ است. با استفاده از برهان خلف ثابت کنید $\sqrt{۵} + ۲$ گنگ است.

۳۹ برای هر دو عدد حقیقی و مثبت x و y، ثابت کنید: $\mathrm{xy} \leqslant \left(\frac{x+y}{۲}\right)^۲$

۴۰ برای هر عدد حقیقی و مثبت a ، ثابت کنید: $a + \frac{۱}{a} \geqslant ۲$

۴۱ می‌دانیم $\sqrt{۷}$ عدد گنگ است. با استفاده از برهان خلف ثابت کنید $\sqrt{۳ + \sqrt{۷}}$ عددی گنگ است.

۴۲ درستی یا نادرستی گزاره‌ی زیر را با ذکر دلیل بررسی کنید.
به ازای هیچ دو عدد اول a وb، عدد $a + b$ اول نیست.

۴۳ درستی یا نادرستی گزاره‌ی زیر را با ذکر دلیل بررسی کنید.
اگر x فرد باشد، آنگاه $x(x+2)$ هم فرد می‌باشد.

۴۴ با استدلال استنتاجی، نشان دهید حاصل‌ضرب دو عدد صحیح زوج متوالی، مضرب ۸ است.

۴۵ با استفاده از برهان خلف، ثابت کنید اگر n یک عدد طبیعی و $(5n+3)$ زوج باشد آن‌گاه n یک عدد فرد است.

۴۶ عبارت زیر درست است یا نادرست ؟ برای عبارت نادرست مثال نقض بیاورید.
مربع هر عدد فرد به اضافه یک، عددی زوج است.

۴۷ اگر a و b دو عدد حقیقی با شند، با استفاده از اثبات بازگشتی ثابت کنید:
$2a^2+b^2+1 \geqslant 2(a-ba)$

۴۸ آخرین رقم سمت راست عدد 27^{1386} را به‌دست آورید.

۴۹ معادله‌ی سیاله $13x+17y=100$ را در Z حل کنید.

۵۰ نشان دهید مربع هر عدد فرد به‌صورت $8q+1$ است.

۵۱ ثابت کنید اگر $(a,b)=1$ و $(a,c)=1$ باشند، آن‌گاه $(a,bc)=1$

۵۲ اگر $a \mid b$ و $c \mid b$ و $(a,c)=1$ باشد، ثابت کنید: $ac \mid b$

۵۳ رقم یکان $3^{25}+7^{73}$ را محاسبه کنید.

۵۴ ثابت کنید از رابطه‌ی هم‌نهشتی (پیمانه‌ی m) $ac \equiv bc$ نتیجه می‌شود. (پیمانه $\frac{m}{d}$) $a \equiv b$ که در آن $d=(m,c)$.

۵۵ نشان دهید حاصل‌ضرب هر دو عدد به‌صورت $6k+5$، عددی به‌صورت $6k+1$ است.

۵۶ ثابت کنید اگر $b|c$، آن‌گاه $(a,b)=(a+c,b)$.

۵۷ ثابت کنید اگر $a|bc$ و $(a,b)=1$، آن‌گاه $a|c$.

۵۸ با ذکر دلیل، درستی یا نادرستی عبارت زیر را بررسی کنید.
اگر $xy=0$ آنگاه $x=0$ و $y=0$.

۵۹ با استدلال برهان خلف ثابت کنید اگر $\sqrt{۷}$ عدد گنگ و x عدد گویا است آنگاه $x+\sqrt{۷}$ عددی گنگ است.

۶۰ درستی یا نادرستی حکم زیر را تعیین کنید و در صورت نادرستی مثال نقض بیاورید.
اگر $n^۲$ مضرب ۳ باشد آنگاه n نیز مضرب ۳ است.

۶۱ با استفاده از روش استدلالی برهان خلف ثابت کنید "$\sqrt{۳}$ عددی گنگ است."

۶۲ اگر باقی‌مانده تقسیم m و n بر ۱۳ به ترتیب اعداد ۲ و ۹ باشد در این صورت باقی‌مانده تقسیم عدد $\mathrm{۳m}-\mathrm{۵n}$ بر ۱۳ را بدست آورید.

۶۳ اگر در یک سال، شنبه روز اول مهر باشد، در این صورت با استفاده از هم نهشتی تعیین کنید ۱۲ بهمن، در همان سال چه روزی از هفته است؟

۶۴ با تبدیل معادله سیاله خطی $\mathrm{۵x}+\mathrm{۲y}=۱۸$ به معادله هم نهشتی و حل آن، جوابهای عمومی این معادله را بیابید.

۶۵ ثابت کنید حاصل جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ عددی گنگ است.

۶۶ گزاره‌های زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) ثابت کنید:
الف) اگر x و y دو عدد حقیقی هم‌علامت باشند داریم: $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq ۲$
ب) برای هر سه عدد حقیقی x و y و z داریم: $x^۲+y^۲+z^۲\geq \mathrm{xy}+\mathrm{yz}+\mathrm{zx}$
پ) برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم: $x^۲+y^۲+۱\geq \mathrm{xy}+x+y$

۶۷ اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha+\beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha-\beta$ و $\alpha+۲\beta$ گنگ هستند.

۶۸ آیا مقادیر حقیقی و ناصفر a و b چنان وجود دارند که: $\frac{۱}{a+b}=\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}\quad (a+b\neq ۰)$

۶۹ اگر عددی مانند k در Z باشد به طوری‌که $۵|۴k+۱$، ثابت کنید: $۲۵|۱۶k^۲+۲۸k+۶$

۷۰ اگر $m,n\in\mathrm{N}$ و $a,b\in\mathrm{Z}$ ثابت کنید: $m\leq n, a|b\Rightarrow a^m|b^n$

۷۱ اگر a عددی صحیح و فرد باشد و $b|a+۲$ در این صورت باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $(a^۲+b^۲+۳)$ بر ۸ را بیابید.

۷۲ ثابت کنید: اگر باقی‌مانده‌های تقسیم دو عدد a و b بر m مساوی باشند آن‌گاه $a\overset{m}{\equiv}b$.

۷۳ با استفاده از بسط دو جمله‌ای خیام یعنی،

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}\times a^n + \binom{n}{1}\times a^{n-1}b + \binom{n}{2}\times a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}\times a^{n-3}b^3 + \ldots + \binom{n}{n}\times b^n$$

ثابت کنید عدد $12^{51} - 11^{51} - 23^{51}$ بر عدد ۱۳۲ بخش‌پذیر است.

۷۴ باقی‌مانده تقسیم عدد $A = 1! + 2! + 3! + \ldots + 500!$ را بر ۱۰ به دست آورید (رقم یکان A را بیابید)

۷۵ همه‌ی اعداد صحیح چون a را بیابید که ۵ برابر آن‌ها به علاوه‌ی ۹ بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد.

۷۶ به چند طریق می‌توان از بین دو نوع گل یک دسته گل شاملِ ۹ شاخه به دلخواه انتخاب کرد؟

۷۷ چند عدد طبیعی مانند n به طوری‌که $1 \leq n \leq 350$ وجود دارد که بر هیچ‌یک از اعداد ۴ و ۶ بخش‌پذیر نباشد.

۷۸ به روش بازگشتی ثابت کنید، اگر $a > 0$ آن‌گاه $a + \frac{1}{a} \geq 2$.

۷۹ ثابت کنید می‌توان دو طرف یک رابطه هم‌نهشتی را در عددی صحیح ضرب کرد، به عبارتی دیگر، برای اعداد صحیح a, b, c و عدد طبیعی m، اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ آن‌گاه $ac \overset{m}{\equiv} bc$.

۸۰ فرض کنید $a, b \in \mathrm{Z}, m \in \mathrm{N}$ اگر $n \in \mathrm{N}, a \overset{m}{\equiv} b$ ثابت کنید: $a^n \overset{m}{\equiv} b^n$.

۸۱ ثابت کنید اگر: $p \geq 5$ عددی اول باشد، آن‌گاه به یکی از دو صورت $p = 4k + 1$ یا $p = 4k + 3$ نوشته می‌شود.

۸۲ ثابت کنید حاصل جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

۸۳ معادله سیاله $5x + 2y = 18$ را حل کرده و جواب عمومی آن‌را بنویسید.

۸۴ در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۲۰۰ $(1 \leq n \leq 200)$ چند عدد وجود دارد که بر۴ بخش‌پذیر باشند ولی بر ۷ بخش‌پذیر نباشند؟

۸۵ ثابت کنید برای هر عدد طبیعی زوج n، $n^2 - 5n + 7$ عددی فرد است.

۸۶ اگر عددی مانند k در Z باشد، به طوری که $5|4k + 1$، ثابت کنید $25|16k^2 + 28k + 6$.

۸۷ اگر در یک سال، اول مهر شنبه باشد، در این صورت ۱۲ بهمن در همان سال چه روزی است؟

۸۸ اگر باقیماندهٔ تقسیم عدد a بر دو عدد ۶ و ۷ به‌ترتیب ۳ و ۵ باشد، باقیماندهٔ تقسیم عدد a را بر ۴۲ بیابید.

۸۹ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

الف) اگر x یک عدد گنگ باشد، $\frac{۱}{x}$ نیز عددی گنگ است.

ب) اگر $a|b+c$ آنگاه $a|b$ یا $a|c$.

پ) برای مقادیر حقیقی و ناصفر a و b به شرط آنکه $a+b\neq ۰$ تساوی $\frac{۱}{b}+\frac{۱}{a}=\frac{۱}{a+b}$ برقرار است.

ت) دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۶ وجود ندارد.

۹۰ اگر $a\neq ۰$ عددی صحیح و دو عدد $(۵m+۴)$ و $(۶m+۵)$ بر a بخشپذیر باشند، ثابت کنید $a=\pm ۱$.

۹۱ برای هر دو عدد حقیقی x و y، به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) نشان دهید:

$$۲x^۲+۲\mathrm{xy}+y^۲\geq ۴x-۴$$

۹۲ به روش برهان خلف نشان دهید اگر a عدد صحیح فرد باشد و $b|a+۲$، آن‌گاه b نیز عددی فرد است.

۹۳ جای خالی را پر کنید.

اگر $\mathrm{bc}\overset{m}{\equiv}\mathrm{ac}$ و $(c,m)=d$ آنگاه ....

۹۴ گزارهٔ زیر را اثبات یا با مثال نقض رد کنید.

اگر تابع f در $x=a$ پیوسته ولی تابع g در $x=a$ ناپیوسته باشد، در این صورت تابع $f+g$ در $x=a$ ناپیوسته است.

۹۵ اگر a عددی اول و بزرگ‌تر از ۳ باشد، ثابت کنید $(a^۲-۱)$ بر ۱۲ بخش‌پذیر است.

۹۶ چنانچه گزاره زیر درست است آن را اثبات کنید و اگر نادرست است آن را با ارائه مثال نقض، رد کنید.

- با اضافه کردن یک واحد به حاصل‌ضرب دو عدد زوج متوالی، حاصل، مربع کامل است.

۹۷ اگر $a|b$ و $b\neq ۰$، در این صورت ثابت کنید: $|a|\leq|b|$.

۹۸ ثابت کنید: حاصل‌ضرب دو عدد متوالی زوج است.

۹۹ اگر $a\neq ۰$ عددی صحیح و دو عدد $(۷m+۶)$ و $(۶m+۵)$ بر a بخش‌پذیر باشند، ثابت کنید $a=\pm ۱$.

۱۰۰ همهٔ اعداد صحیحی را بیابید که سه برابر آن‌ها منهای ۱۳، بر ۷ بخش‌پذیر باشد.