

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

۱

$$\begin{array}{r} x^3 + 5x^2 - 6 \quad | \quad x - 1 \\ -x^3 + x^2 \quad \quad \quad \\ \hline x^2 + 5x - 6 \\ -x^2 + x \quad \quad \quad \\ \hline 6x - 6 \\ -6x + 6 \quad \quad \quad \\ \hline 0 \end{array}$$

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

۲

$$\begin{array}{r} x^2 + x^2 y - 2x - y \quad | \quad x + y \\ -x^2 - x^2 y \quad \quad \quad \\ \hline -2x - y \\ +2x + 2y \quad \quad \quad \\ \hline y \end{array}$$

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

۳

$$\begin{array}{r} 4x^3 + 8x^2 - 11x \\ -(4x^3 - 2x^2) \\ \hline 10x^2 - 11x \\ -(10x^2 - 5x) \\ \hline -6x \\ -(-6x + 3) \\ \hline -3 \end{array}$$

$$2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5\left(\frac{1}{2}\right) - 3 = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} - 3 = 0$$

مقدار $2x^2 + 5x - 3$ را به ازای $x = \frac{1}{2}$ محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{array}{r} 2x - 1 \\ \hline 2x^2 + 5x - 3 \end{array}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۴

$$f(x) = x^4 + 3x^2 - 1$$

$$f(1) = 1^4 + 3(1)^2 - 1 = 3$$

$$f(-1) = (-1)^4 + 3(-1)^2 - 1 = 1 + 3 - 1 = 3$$

$$f'(1) = 4x^3 = 4, \quad f'(-1) = (-3)^2 = 9$$

$$(f(-1))' - (f(1))' = 9 - 4 = 5$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. باقی مانده عبارت $P(x) = x^{12n+1} + 2x^{12n} - x^5 + 3x^2 + 2x^1 + m$ بر $x + 2$ برابر با ۱۱ است و لذا $P(-2) = 11$ می باشد. داریم:

$$P(-2) = (-2)^{12n+1} + 2(-2)^{12n} - (-2)^5 + 3(-2)^2 + 2(-2)^1 + m = 11$$

$$\Rightarrow \underbrace{-2(-2)^{12n} + 2(-2)^{12n}}_{\text{صفر}} + 32 - 24 + 8 + m = 11 \Rightarrow m = -5$$

بنابراین عبارت $P(x)$ را به صورت $P(x) = x^{12n+1} + 2x^{12n} - x^5 + 3x^2 + 2x^1 - 5$ می نویسیم.

$$P(x) = (x^2 - 1)Q(x) + (ax + b) \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow P(1) = a + b \Rightarrow a + b = 2 \\ x = -1 \Rightarrow P(-1) = -a + b \Rightarrow -a + b = -4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow b = -1, a = 3 \Rightarrow R(x) = 3x - 1$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. باقی مانده تقسیم $f(x)$ بر $(x - a)$ برابر است با $f(a)$ ، لذا داریم:

$$f(-1) = 1, f(2) = 4$$

باقی مانده $f(x)$ بر $x^2 - x - 2$ حداکثر از درجه ی یک است، لذا فرض می کنیم به صورت $ax + b$ باشد، داریم:

$$f(x) = (x^2 - x - 2) \cdot Q(x) + ax + b$$

$$\begin{cases} f(-1) = 1 \Rightarrow 0 \times Q(-1) - a + b = 1 \\ f(2) = 4 \Rightarrow 0 \times Q(2) + 2a + b = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a + b = 1 \\ 2a + b = 4 \end{cases} \Rightarrow a = 1, b = 2$$

بنابراین باقی مانده به صورت $x + 2$ است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ضرب x^2 منفی است پس سهمی max دارد یعنی $\cap$ پس گزینه ی ۱ یا ۴ صحیح

است اگر به $x = 0$ بدهیم محور x ها را در $y = 2$ قطع می کند. (ضابطه ی تابع) در صورتی که در گزینه ی ۱ مقدار y به ازای $x = 0$ منفی است پس گزینه ی ۴ صحیح است.

$$f(x) = (x - 2)^2 + 13 \rightarrow f(\sqrt{3} + 2) = 16$$

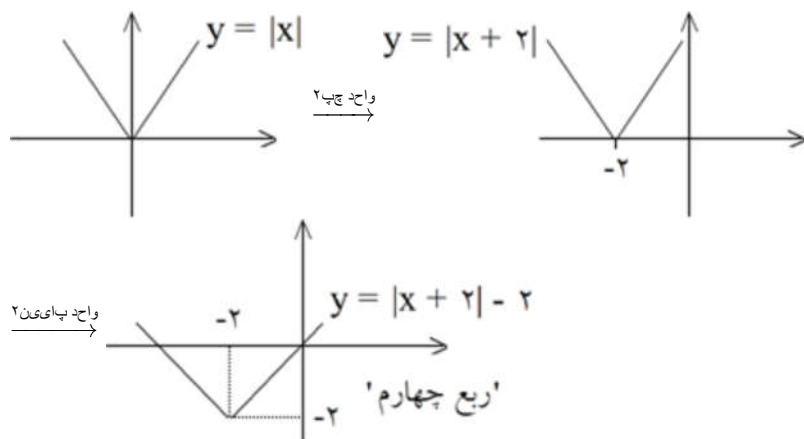
گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(-3) = -1 \end{cases}, f(x) = ax + b \Rightarrow \begin{cases} 1 = 0(a) + b \\ -1 = -3a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ 3a - b = 1 \Rightarrow 3a - 1 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = \frac{2}{3} \Rightarrow f(x) = \frac{2}{3}x + 1 \Rightarrow f(2) = \frac{2}{3} \times 2 + 1 = \frac{7}{3}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. $f(x) = 2x - x^2 \rightarrow f(2) = 2 \times 2 - 2^2 = 0$.

$$(۱) f(x) - f(2) = 2x - x^2 - 0 = 2x - x^2 = f(x)$$

$$(۲) f(2-x) = 2(2-x) - (2-x)^2 = 4 - 2x - x^2 - 4 + 4x = 2x - x^2 = f(x)$$

$$(۳) f(x) + f(2) = 2x - x^2 + 0 = 2x - x^2 = f(x)$$

$$(۴) f(2+x) = 2(2+x) - (2+x)^2 = 4 + 2x - 4 - x^2 - 4x = -2x - x^2 \neq f(x)$$

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. ۱۲

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$p(-1) = a(-1)^4 - b(-1)^3 + 4(-1)^2 - (-1) + 1 = 3$$

$$a + b + 4 + 1 + 1 = 3 \Rightarrow a + b = -3$$

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. ۱۳

عبارت $(x+2)^2(x+3)^2$ بر $(x^2+5x+6)^2$ بخش پذیر است. خارج قسمت آن برابر است با:

$$\frac{(x+2)^2(x+3)^2}{(x+2)^2(x+3)^2} = x+2$$

عبارت x^3 بر $(x^2+5x+6)^2$ قابل تقسیم نیست پس خارج قسمت صفر است. بنابراین در کل خارج قسمت $x+2$ می باشد.

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. ۱۴

$$p(x) = x^2 - (a+1)x + a = (x-1)(x-a)$$

$$p(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = a \end{cases}$$

$$x = 1 : f(1) = 0 \Rightarrow 1^2 - 4 \times 1 + m = 0 \Rightarrow m = 3$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-1)(x^2 + 2x + 3)$$

$$x = a : f(a) = 0 \Rightarrow (a-1)^2(a^2 + 2a + 3) = 0$$

چون عبارت $a^2 + 2a + 3$ همواره مثبت است، پس $a = 1$ است.

$$\Rightarrow m + a = 3 + 1 = 4$$

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. ۱۵

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 2x + 3 & x - 1 \\ \hline -(x^3 - x^2) & \\ \hline x^2 - 2x + 3 & \\ -(x^2 - x) & \\ \hline -x + 3 & \\ -(-x + 1) & \\ \hline 2 & \end{array}$$

راه دوم:

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$1^3 - 2(1) + 3 = 1 - 2 + 3 = 2$$

$$f(x) = -x^2 - 2x$$

$$f(x-1) = -(x-1)^2 - 2(x-1) = -(x^2 - 2x + 1) - 2x + 2 = -x^2 + 2x - 1 - 2x + 2 = -x^2 + 1$$

$$f(x+1) = -(x+1)^2 - 2(x+1) = -(x^2 + 2x + 1) - 2x - 2 = -x^2 - 2x - 1 - 2x - 2 = -x^2 - 4x - 3$$

$$\Rightarrow f(x-1) - f(x+1) = -x^2 + 1 + x^2 + 4x + 3 = 4x + 4 = 4(x+1)$$

$$f(x-1) = f(x) - 1 \Rightarrow a(x-1) + b = ax + b - 1 \Rightarrow ax - a + b = ax + b - 1$$

$$\Rightarrow a = 1 \Rightarrow f(x) = x + b$$

$$f(2) = 6 \Rightarrow 6 = 2 + b \Rightarrow b = 4$$

بنابراین $f(x) = x + 4$ بوده و این تابع محور x ها را در نقطه‌ای به طول $x = -4$ قطع می‌کند.

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

$$f(3a-1) < f(a+1) \Rightarrow 3a-1 > a+1 \Rightarrow 2a > 2 \Rightarrow a > 1$$

$f(ax)$ ($a > 1$) با منقبض کردن نمودار $y = f(x)$ با ضریب $\frac{1}{a}$ در امتداد محور x ها به دست می‌آید.

برای رسم نمودار تابع $f(-2x)$ کافی است نمودار تابع $y = f(x)$ هم نسبت به محور y ها قرینه شود و هم با ضریب $\frac{1}{2}$ در امتداد محور x ها منقبض گردد.

($y = x$) ریشه‌ی مضاعف داشته باشد.

$$2x^2 + (m+1)x + m + 6 = x \Rightarrow 2x^2 + mx + m + 6 = 0 \xrightarrow{\Delta=0} m^2 - 4(2)(m+6) = 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 8m - 48 = 0 \Rightarrow (m-12)(m+4) = 0 \Rightarrow m = 12, m = -4$$

چون تأکید شده نمودار بر نیم‌ساز ناحیه‌ی اول مماس است. ریشه‌ی مضاعف معادله‌ی تلاقی (طول نقطه‌ی تماس) باید مثبت باشد.

$$m = 12 \Rightarrow 2x^2 + 13x + 18 = 0 \Rightarrow x^2 + 6.5x + 9 = 0$$

$$m = -4 \Rightarrow 2x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$$

پس $m = -4$ صحیح است. نمودار بر نیم‌ساز ربع اول مماس است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۲۱

$$f(-2) = 0 \Rightarrow 16 + 8a + 16 = 0 \Rightarrow a = -4$$

$$f(x) = x(x^2 + 4x - 8)$$

$$\begin{array}{r} x^3 + 4x^2 - 8 \\ -x^3 - 2x^2 \\ \hline 6x^2 - 8 \\ -6x^2 - 4x \\ \hline -4x - 8 \\ 4x + 8 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \overline{x+2} \\ x^2 + 2x - 4 = 0 \Rightarrow (x+1)^2 = 5 \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{5} - 1 \\ x = -\sqrt{5} - 1 \end{cases} \end{array}$$

کوچک ترین ریشه

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نقطه‌ی $(-1, 0)$ در هر دو تابع صادق است. ۲۲

$$0 = -2(-1) + b \Rightarrow b = -2$$

$$0 = 1 + a - 4 \Rightarrow a = 3$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۲۳

نکته: اگر $\frac{c}{a} < 0$ ، آنگاه معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، دو جواب با علامت‌های متفاوت دارد و در نتیجه نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، از هر چهار ناحیه‌ی مختصات عبور می‌کند.

$$f(x) = (m-1)x^2 + x + (m+2)$$

$$\frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \frac{m+2}{m-1} < 0 \Rightarrow -2 < m < 1$$

بنابراین بیش‌ترین مقدار b برابر با یک و کم‌ترین مقدار a برابر با (-2) است، پس بیش‌ترین مقدار $b - a$ برابر می‌شود با

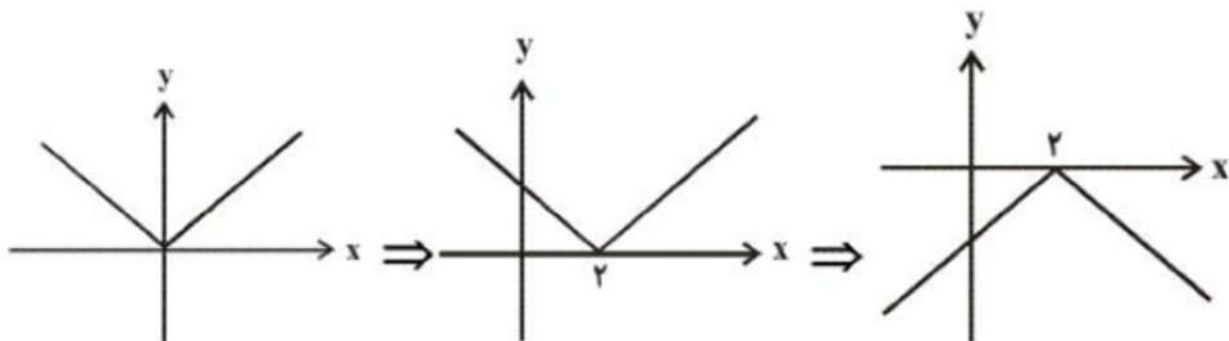
$$1 - (-2) = 3$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۲۴

$$y = |x|$$

$$y = |x - 2|$$

$$y = -|x - 2|$$



۲۵

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مختصات نقطه‌ای به عرض $y = 1$ روی محور عرض‌ها $(0, 1)$ می‌باشد. همچنین مختصات نقطه‌ای به طول (-2) روی محور x ، $(-2, 0)$ است. این تابع از نقطه‌ی $(-2, -2)$ نیز می‌گذرد، بنابراین مختصات این نقاط در معادله‌ی تابع صدق می‌کند، لذا داریم:

$$\begin{cases} 0 = a(-2)^2 + b(-2) + c \\ -2 = a(-3)^2 + b(-3) + c \\ 1 = a(0)^2 + b(0) + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a - 2b + c = 0 \\ 9a - 3b + c = -2 \\ c = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4a - 2b = -1 \\ 9a - 3b = -3 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} a = -\frac{1}{4}, b = -\frac{1}{4} \Rightarrow a + b + c = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1 = 0$$

۲۶

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. باقی‌مانده‌ی تقسیم $ax^2 + bx^2 + 1$ برابر ۱ است. بنابراین با توجه به رابطه‌ی تقسیم داریم:

$$ax^2 + bx^2 + 1 = (x^2 + 1)Q(x) + 1$$

$$a(x^2)^2 + bx^2 + 1 = (x^2 + 1)Q(x) + 1$$

$$\xrightarrow{x^2 = -1} a(-1)^2 + b(-1) + 1 = 0 + 1 \Rightarrow a - b = 0 \Rightarrow a = b$$

پس باقی‌مانده‌ی تقسیم $x^2 + ax + 2b$ بر $P(x) : x + 2$ برابر $P(-2)$ است.

$$R = P(-2) = (-2)^2 + a(-2) + 2b = 4 - 2a + b = 4 - 2a + 2a = 4 \Rightarrow R = 4$$

۲۷

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. کافی است در رابطه‌ی داده شده به جای x ، عدد صفر را قرار دهیم که در این صورت:

$$3f(1) + 5f(1) - 7f(1) = -2 \Rightarrow f(1) = -2$$

۲۸

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا $f(2x + 5)$ را می‌سازیم:

$$f(x) = ax + b \Rightarrow f(2x + 5) = a(2x + 5) + b = 2ax + 5a + b$$

حال داریم:

$$f(2x + 5) = 5x + 2 \Rightarrow 2ax + 5a + b = 5x + 2 \Rightarrow \begin{cases} 2a = 5 \\ 5a + b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{5}{2} \\ b = -\frac{21}{2} \end{cases}$$

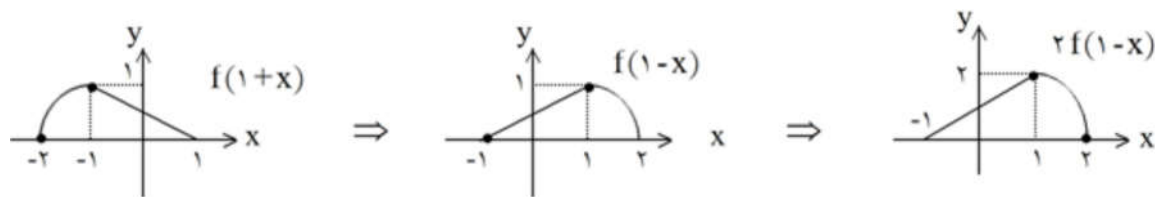
پس $a - b = 13$ است.

۲۹

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. با استفاده از نمودار f ابتدا نمودار $y = f(1 + x)$ را رسم می‌کنیم که یک واحد انتقال به

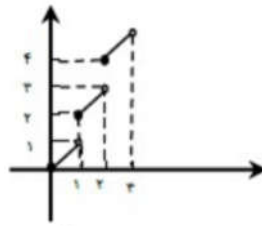
چپ است. سپس با تبدیل x به $-x$ ، به $f(1 - x)$ می‌رسیم که قرینه‌ی $f(1 + x)$ نسبت به محور y است و در نهایت

$2f(1 - x)$ را رسم می‌کنیم که انبساط در جهت محور y است.

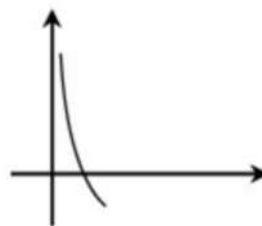


گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. ۳۰

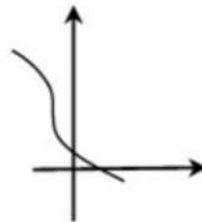
گزینه‌ی ۱: اکیداً صعودی



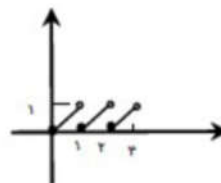
گزینه‌ی ۲: اکیداً نزولی



گزینه‌ی ۳: اکیداً نزولی



گزینه‌ی ۴: غیر یکنوا



گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. ۳۱

$$x^3 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow x' = -1, x'' = -2$$

$$\begin{cases} f(-1) = 0 \Rightarrow a + b = -1 \\ f(-2) = 0 \Rightarrow 4a + b = -2 \end{cases} \xrightarrow{+} 3a = -3 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow b = 0$$

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. باید $P(-2) = 0$ باشد. یعنی: ۳۲

$$-4k + 4(k+1) + 2k - 2 = 0 \Rightarrow -2k = -2 \Rightarrow k = 1$$

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. ۳۳

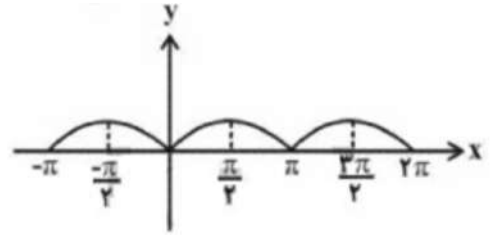
$$f(x) = (x^2 - 3x + 2)Q(x) + 3x - 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow f(1) = 2 \\ x = 2 \Rightarrow f(2) = 5 \end{cases}$$

باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x) + f(3-x)$ بر $x-2$ برابر است با:

$$R = f(2) + f(3-2) = f(2) + f(1) = 5 + 2 = 7$$

۳۴

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. تعریف $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ ، نشان‌دهنده‌ی نزولی اکید بودن تابع f در بازه‌ی موردنظر است. نمودار تابع f به صورت زیر است:



با توجه به شکل و با توجه به گزینه‌ها، تابع در فاصله‌ی $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ اکیداً نزولی است.

۳۵

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ضابطه‌ی تابع خطی به صورت $f(x) = ax + b$ است. طبق فرض داریم:

$$f(-1) = 2 \Rightarrow -a + b = 2, f(1) = 4 \Rightarrow a + b = 4$$

$$\begin{cases} -a + b = 2 \\ a + b = 4 \end{cases} \Rightarrow b = 3, a = 1 \Rightarrow f(x) = x + 3 \Rightarrow f(3) = 6$$

$$f(2 - f(3)) = f(2 - 6) = f(-4) = -1$$

بنابراین:

۳۶

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = (x-1)Q(x) + R \xrightarrow{x=1} f(1) = R \Rightarrow 1 - m + 2 = -2 \Rightarrow m = +5$$

$$f(x) = x^2 - 5x + 2 \xrightarrow{x=-2} R' = -8 + 10 + 2 = 4$$

۳۷

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$x = 2 \Rightarrow 16 + 4a - 6 + a + 5 = 0 \Rightarrow a = -3$$

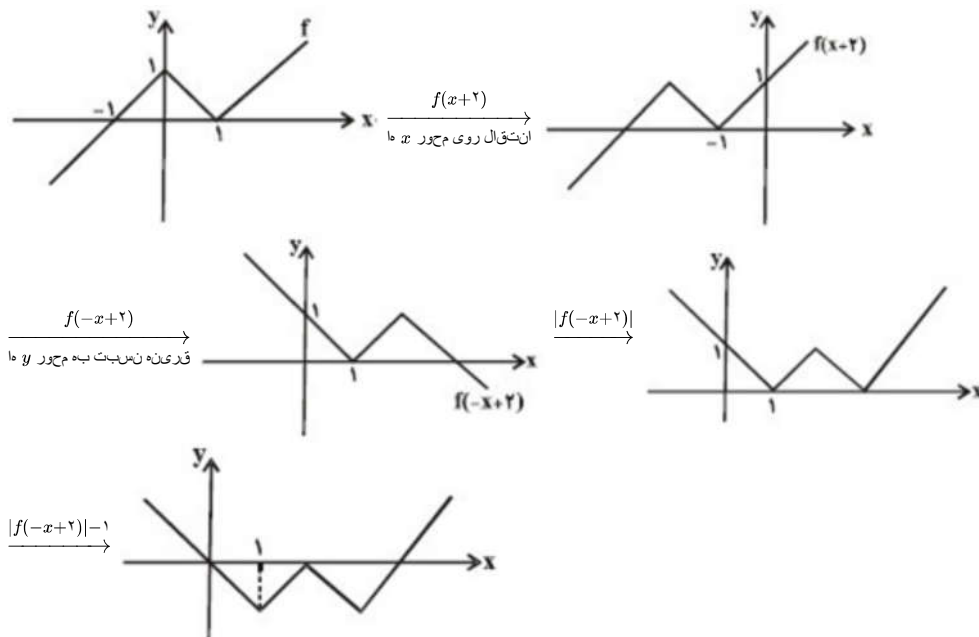
$$2x^2 - 3x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(2x^2 + x - 1) = 0$$

با جانشینی $a = -3$ داریم:

معادله‌ی درجه‌ی دوم $2x^2 + x - 1 = 0$ دارای دو ریشه $\frac{1}{2}$ و -1 است.

۳۸

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$$f^{-1}(4) = 0 \Rightarrow f(0) = 4$$

چون تابع f خطی است با توجه به مفروضات مسئله می‌توانیم یک رابطه خطی برای آن بنویسیم:

$$\begin{cases} f(3) = 1 \\ f(0) = 4 \end{cases} \Rightarrow f(x) = 4 - x$$

$$f(6) = 4 - 6 = -2$$

$$3f(6) - f(0) = 3(-2) - 4 = -6 - 4 = -10$$

اگر نمایش جبری تابع خطی f را بصورت $f(x) = ax + b$ در نظر بگیریم، طبق صورت سؤال، نقاط

$$A = \left(-\frac{1}{4}, 0\right) \text{ و } B = \left(0, \frac{1}{4}\right) \text{ در آن صدق می‌کنند، پس:}$$

$$\begin{cases} 0 = a \times \left(-\frac{1}{4}\right) + b \\ \frac{1}{4} = a \times (0) + b \end{cases} \Rightarrow b = \frac{1}{4}, a = 1$$

پس نمایش جبری f به صورت $f(x) = x + \frac{1}{4}$ است. اگر x طول نقطه‌ی تقاطع نمودار تابع f با نیمساز ربع دوم و چهارم

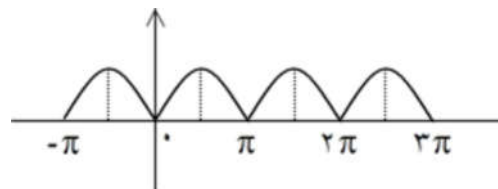
باشد، داریم:

$$f(x) = -x \Rightarrow x + \frac{1}{4} = -x \Rightarrow x = -\frac{1}{4}$$

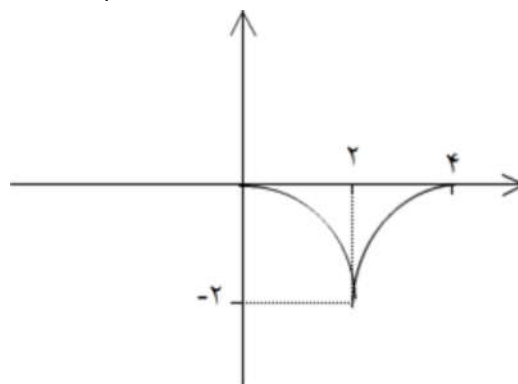
$$\Rightarrow \text{عرض نقطه‌ی تقاطع} : -x = \frac{1}{4}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. تابع $y = \sin x$ را رسم می‌کنیم قرینه قسمت‌های منفی آن را نسبت به محور x تعیین

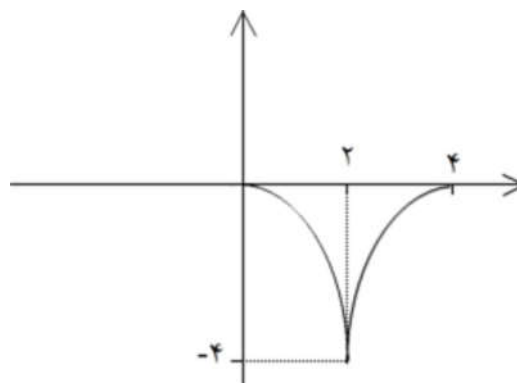
می‌کنیم تا منحنی $y = |\sin x|$ حاصل شود. پیدا است که در گزینه‌ها منحنی در بازه $\left[\pi, 3\frac{\pi}{4}\right]$ صعودی است.



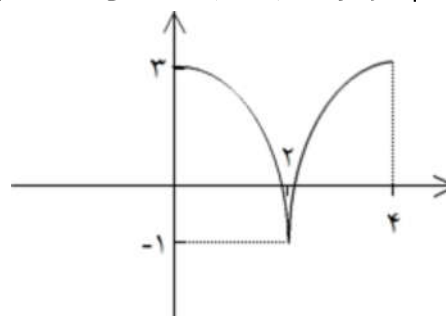
گزینه ۱ پاسخ صحیح است. برای رسم $f(x-a)$ کافی است نمودار را a واحد به سمت راست منتقل کنیم و برای رسم $kf(x)$ کافی است عرض نقاط را k برابر نماییم. در این صورت ابتدا $-f(x-1)$ را رسم می‌کنیم:



حال نمودار $-2f(x-1)$ را با توجه به مطالب گفته شده در بالا رسم می‌کنیم:



برای رسم نمودار $-2f(x-1) + 3$ کافی است، تنها به عرض نقاط، 3 واحد بیافزاییم در نتیجه:



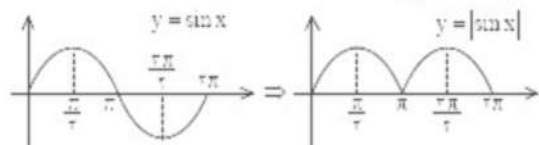
گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

منحنی بالای محور x است، پس: $y > 0$ یا $\frac{1}{x^2} + (m-2)x + 1 > 0$ ، چون تابع درجه دوم می‌نیمم دارد، کافی است

معادله درجه دوم حاصل ریشه باشد: $\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 4(m-2)^2 < 0$ ، پس: $(m-2)^2 < 2$ ، در نتیجه:

$$2 - \sqrt{2} < m < 2 + \sqrt{2}$$

۴۴ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به نمودار تابع در بازه $\left(\frac{2\pi}{3}, 2\pi\right)$ اکیداً نزولی است.



۴۵ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نکته: چندجمله‌ای $P(x)$ بر $ax + b$ بخش‌پذیر است، اگر و تنها اگر $P\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$.

طبق فرض $f(x-2)$ بر $x-1$ بخش‌پذیر است، پس $f(-1) = f(1-2) = 0$ حال باید x ای را بیابیم که به ازای آن داشته باشیم:

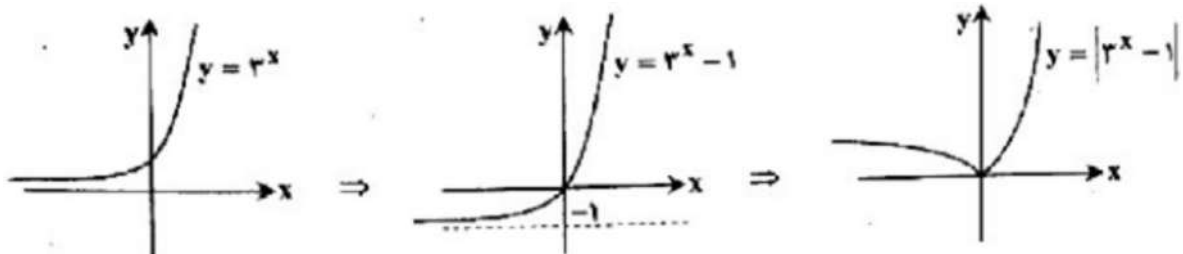
$$2x + 3 = -1$$

$$2x + 3 = -1 \Rightarrow x = -2$$

$f(2x+3)$ به ازای $x = -2$ صفر می‌شود، پس بر $x+2$ بخش‌پذیر است.

۴۶ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. این نمودار با انتقال دادن نمودار $y = x^2$ به راست و پایین به دست آمده است. پس ضابطه‌ی این نمودار باید به صورت $y = (x-a)^2 - b$ باشد که در آن a و b دو عدد حقیقی و مثبت هستند، لذا گزینه‌ی (۳)، می‌تواند ضابطه‌ی این تابع را نشان دهد.

۴۷ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نکته: برای رسم نمودار $|g(x)|$ ، ابتدا نمودار $g(x)$ را رسم کرده و سپس قسمت‌های زیر محور x را حذف و قرینه‌ی آن‌ها را نسبت به محور x رسم می‌کنیم. ابتدا ضابطه‌ی تابع f را به صورت $f(x) = |3^x - 1|$ می‌نویسیم.



۴۸ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$x^5 - x + 1 = 0 \Rightarrow x^5 = x - 1$$

با جای‌گذاری این مقدار در $x^5 + x^5$ ، باقی‌مانده به دست می‌آید:

$$x^5 + x^5 = (x^5)^1 + x(x^5) = (x-1)^5 + x(x-1) = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1 + x^5 - x = 2x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 4x - 1$$

$$= 2x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 4x - 1 \xrightarrow{x^5 = x-1} 2(x-1) - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 4x - 1 = -x - 1$$

۴۹ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانیم در تابع ثابت، عرض همه‌ی نقاط واقع بر نمودار ثابت است، پس داریم:

$$f(1) = f(3) = f(\sqrt{5})$$

بنابراین:

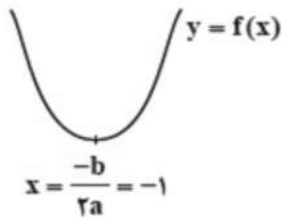
$$\begin{cases} a + b = 3 \\ 5a - b = 3 \end{cases}$$

از حل دستگاه بالا خواهیم داشت $a = 1$ و $b = 2$ ، بنابراین داریم:

$$ab = 1 \times 2 = 2$$

۵۰

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نکته: نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ با شرط $a > 0$ ، در بازه‌ی $\left(-\infty, \frac{-b}{2a}\right]$ اکیداً نزولی و در بازه‌ی $\left[\frac{-b}{2a}, +\infty\right)$ اکیداً صعودی است.



۵۱

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$x^4 + 64 = x^4 + 16x^2 + 64 - 16x^2$$

$$= (x^2 + 8)^2 - 16x^2 = (x^2 + 8 - 4x)(x^2 + 8 + 4x)$$

$$x^2 + mx + n = \begin{cases} x^2 - 4x + 8 \\ x^2 + 4x + 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \pm 4 \\ n = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m + n = 12 \\ m + n = 4 \end{cases}$$

بنابراین:

$$x^4 - ax^2 + x - b = (x^2 + 1)Q(x) + 4x - 1$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\xrightarrow{x^2=-1} (-1)^2 - a(-1)x + x - b = 0 + 4x - 1$$

$$\Rightarrow (a+1)x + 1 - b = 4x - 1$$

$$a+1=4, 1-b=-1 \Rightarrow a=3, b=2$$

در صورتی تساوی فوق برقرار خواهد بود که:

$$\Rightarrow f(-1) = 3(-1)^2 + 2(-1) = 1 = R, x+1 \text{ بر } ax^2 + bx \text{ باقیمانده‌ی تقسیم}$$

۵۳

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. تابع قدرمطلق به صورت تابع چند ضابطه‌ای نوشته می‌شود.

X	$-\infty$	-2	4	$+\infty$
f(X)		$-2X + 8 + 2X + 4$	$-2X + 8 - 2X - 4$	$2X - 8 - 2X - 4$
$f(x) = \begin{cases} 12 & ; x \geq -2 \\ -4x + 4 & ; -2 < x < 4 \\ -12 & ; x \geq 4 \end{cases}$				

تابع در بازه $(-2, 4)$ اکیداً نزولی است.

۵۴

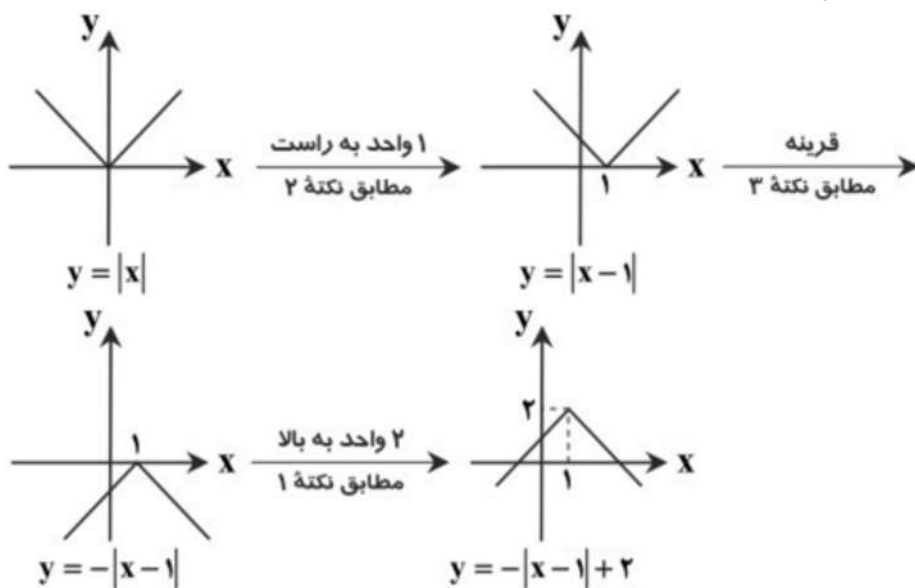
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نکته: اگر دامنه و برد یک تابع برابر باشد و هر عضو از دامنه تابع دقیقاً به همان عضو در برد نظیر شود، تابع را همانی می‌نامیم.
با توجه به نکته، تنها گزینه ۴ یک تابع همانی است.

نکته ۱: با داشتن نمودار تابعی مانند $f(x)$ ، می‌توان نمودار تابع $f(x) + k$ را با انتقال نمودار $f(x)$ به اندازه k واحد در امتداد محور y ها به‌دست آورد. اگر $k > 0$ ، انتقال در جهت مثبت و اگر $k < 0$ ، انتقال در جهت منفی خواهد بود.

نکته ۲: برای رسم تابع $f(x + k)$ کافی است نمودار $f(x)$ را k واحد در امتداد محور x ها انتقال دهیم. اگر $k > 0$ ، انتقال در جهت منفی و اگر $k < 0$ ، انتقال در جهت مثبت خواهد بود.

نکته ۳: برای رسم نمودار تابع $-f(x)$ کافی است نمودار $f(x)$ را نسبت به محور x ها قرینه کنیم.

برای رسم این تابع، مراحل زیر را طی می‌کنیم:



نکته: اگر دامنه و برد یک تابع برابر باشد و هر عضو از دامنه تابع دقیقاً به همان عضو در برد نظیر شود، تابع را همانی می‌نامند. اگر دامنه تابع همانی را R در نظر بگیریم، نمودار آن همان خط $y = x$ است که با معادله $f(x) = x$ هم نمایش داده می‌شود.

نکته: تابعی مانند f را که برد آن تنها شامل یک عضو است، تابع ثابت می‌نامیم. اگر این عضو را k بنامیم، تابع ثابت را معمولاً با معادله $f(x) = k$ نمایش می‌دهند.

$$f(-2) = -2, f(2) = 2, f(4) = 4, g(-1) = g(4) = g(2) = k$$

با توجه به نکات، می‌توان نوشت:

پس می‌توان نوشت:

$$\frac{g(-1)f(4) + g(4)f(2)}{g(2) + f(-2)} = 3 \Rightarrow \frac{4k + 2k}{k + (-2)} = 3 \Rightarrow 6k = 3k + (-6) \Rightarrow k = -2 \Rightarrow g(x) = -2$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right)g\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{3}{2} \times (-2) = -3$$

بنابراین:

۵۷

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

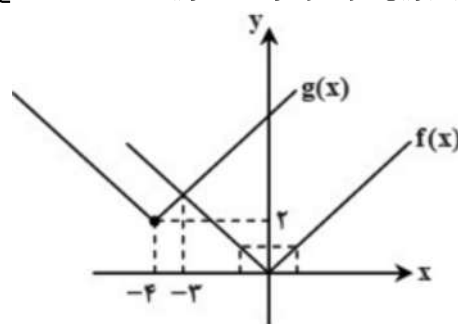
اگر نمودار تابع f را ۴ واحد به سمت x های منفی و ۲ واحد به سمت y های مثبت منتقل کنیم، معادله آن به صورت $g(x) = |x + 4| + 2$ در می آید.

راه حل اول (روش هندسی):

نمودار $f(x)$ و $g(x)$ را در یک دستگاه رسم کرده و تعداد نقاط تقاطع آن‌ها را به دست می آوریم. با توجه به نمودار، واضح است که دو نمودار فقط در یک نقطه ($x = -3$) متقاطع هستند. راه حل دوم (روش جبری): معادله $f(x)$ و $g(x)$ را حل می کنیم:

$$|x| = |x + 4| + 2 \Rightarrow \begin{cases} x < -4 & : -x = -x - 4 + 2 \Rightarrow 0 = -2 \text{ غ ق ق} \\ -4 \leq x < 0 & : -x = x + 4 + 2 \Rightarrow x = -3 \checkmark \\ x \geq 0 & : x = x + 4 + 2 \Rightarrow 0 = 6 \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

بنابراین دو نمودار فقط در یک نقطه متقاطع هستند.



۵۸

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نکته: مختصات رأس سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ عبارت است از:

$$\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right) \right)$$

با توجه به این که رأس سهمی $y = 2x^2 - ax + b$ نقطه‌ی $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ است، می توان نوشت:

$$\begin{cases} \frac{a}{2} = 1 \Rightarrow a = 2 \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \text{سهمی} \Rightarrow 1 = 2 - a + b \xrightarrow{a=2} b = 3 \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 = 16 + 9 = 25$$

۵۹

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا ضابطه‌ی تابع خطی f را به صورت $f(x) = ax + b$ در نظر می گیریم و آن را در معادله‌ی داده شده جای گذاری می کنیم:

$$f(2x - 1) + 2f(3x) = 7x + 1$$

$$\Rightarrow [a(2x - 1) + b] + 2[a(3x) + b] = 7x + 1 \Rightarrow 8ax - a + 3b = 7x + 1$$

$$f(1) = \frac{7}{8} + \frac{5}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

چون ضابطه‌ی تابع f به صورت $f(x) = \frac{7}{8}x + \frac{5}{8}$ است، بنابراین:

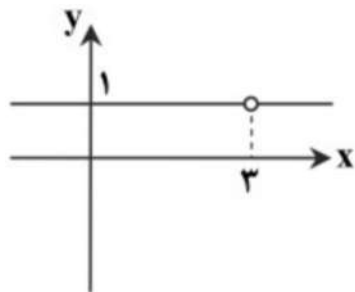
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نکته: اگر $f(x)$ تابعی ثابت باشد، ضابطه آن به صورت $f(x) = k$ است. ($k \in \mathbb{R}$)

راه حل اول:

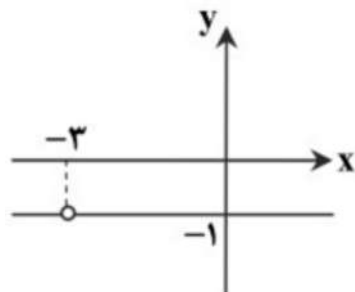
با توجه به نکته می‌توان نوشت:

$$\frac{ax - 3}{x - 3a} = k \Rightarrow ax - 3 = kx - 3ak \Rightarrow a = k, -3ak = -3 \Rightarrow -3a(a) = -3 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

از تساوی فوق نتیجه می‌شود که به ازای $a = 1$ و $a = -1$ نمودار تابع $f(x)$ به صورت‌های زیر می‌باشد:



$$a = 1 \Rightarrow f(x) = \frac{x - 3}{x - 3} = 1, x \neq 3$$



$$a = -1 \Rightarrow f(x) = \frac{-x - 3}{x + 3} = \frac{-(x + 3)}{x + 3} = -1, x \neq -3$$

راه حل دوم:

$$\frac{ax - 3}{x - 3a} = \frac{a(x - \frac{3}{a})}{x - 3a}$$

$$\frac{3}{a} = 3a \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

با توجه به نکته، باید عبارت تساوی x از صورت و مخرج ساده شود، بنابراین:

اگر صورت با مخرج بخواهند با هم ساده شوند، باید داشته باشیم:

ادامه راه حل مشابه است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانیم که بیش‌ترین مقدار تابع درجه‌ی دومی که در آن ضریب x^2 عددی منفی است،

برابر عرض رأس آن است. پس اگر رأس منحنی تابع f را S بنامیم، داریم:

$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2a} = \frac{-2}{a}$$

$$\Rightarrow y_S = f\left(-\frac{2}{a}\right) = a\left(-\frac{2}{a}\right)^2 + 4\left(-\frac{2}{a}\right) + 5 = \frac{-4}{a} + 5 \quad (*)$$

از طرفی طبق فرض مسئله، بیش‌ترین مقدار تابع برابر ۹ است، یعنی:

$$y_S = 9 \xrightarrow{(*)} -\frac{4}{a} + 5 = 9 \Rightarrow a = -1$$

پس خط به معادله‌ی $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2(-1)} = 2$ محور تقارن این تابع درجه‌ی دوم است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = (x^2 + x)Q(x) + (2x + 1) \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 1 \\ f(-1) = -1 \end{cases}$$

$$g(x) = (x^2 + x)Q'(x) + (2x + 2) \Rightarrow \begin{cases} g(0) = 2 \\ g(-1) = -1 \end{cases}$$

$$f(x) \cdot g(x) = (x^2 + x)Q''(x) + ax + b \Rightarrow \begin{cases} f(-1)g(-1) = -a + b = 1 \\ f(0)g(0) = b = 2 \end{cases}$$

$$b = 2 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow R(x) = x + 2$$

۶۳

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

نکته: شرط آنکه $f(x)$ بر $(x-a)^2$ بخش پذیر باشد، آن است که: $f'(a) = f(a) = 0$

$$f(x) = (m-1)x^2 + (2-m)x - x \Rightarrow f'(x) = 2(m-1)x + 2(2-m)x - 1$$

$$\begin{cases} f(1) = (m-1) + (2-m) - 1 = 0 \Rightarrow \text{برای هر مقدار } m \text{ برقرار است} \\ f'(1) = 2m - 2 + 4 - 2m - 1 = 0 \Rightarrow m = 0 \end{cases}$$

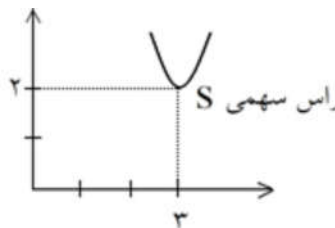
بنابراین تنها به ازای $m = 0$ حکم برقرار است.

۶۴

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در نمودار چون ضریب x^2 مثبت است $\Leftarrow$ نمودار رو به بالا است و مینیمم (min) دارد.

مختصات رأس سهمی:

$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2(1)} = 3 \Rightarrow y_S = (3)^2 - 6(3) + 11 = 9 - 18 + 11 = 2 \Rightarrow S(3, 2)$$

کمترین مقدار نمودار از محور x ها $\Leftarrow 2$

۶۵

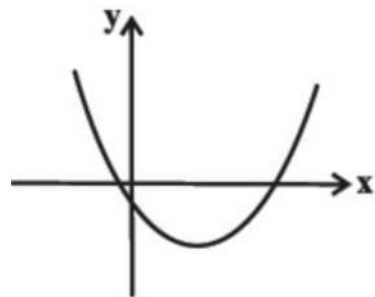
گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = ax^2 - (a^2 - 1)x - a^2, a \neq 0$$

تابع min دارد $\Rightarrow a^2 > 0$

$$\Delta = (a^2 + 1)^2 + 4a^4 > 0 \Rightarrow \text{معادله دو ریشه دارد}$$

$$\begin{cases} S = -\frac{b}{a} = (a^2 + 1) \\ P = \frac{c}{a} = \frac{-a^2}{a^2} = -1 \end{cases}$$

معادله دو ریشه مختلف علامت دارد (چون $P < 0$ است) که ریشه مثبت از قدرمطلق ریشه منفی بزرگتر است (چون $S > 0$ است).

۶۶

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. چون تابع f ثابت است پس بُرد آن تنها یک عضو دارد، بنابراین:

$$b - 1 = a - 2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 5 \end{cases} \Rightarrow 2a - b = 12 - 5 = 7$$

۶۷

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. چون تابع f خطی است پس ضریب x^2 باید صفر باشد بنابراین $a = 1$.

$$f(x) = 2x - 3 \Rightarrow f(a) = f(1) = -1$$

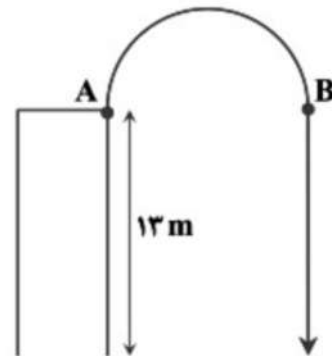
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. رابطه ارتفاع جسم از سطح زمین، یک سهمی به معادله $h(t) = -5t^2 + 18t + 13$ است. با توجه به شکل، باید t_B یعنی زمانی که جسم به نقطه B می‌رسد را به دست بیاوریم.

ارتفاع نقطه B برابر ۱۳ متر است، پس باید معادله $h(t) = 13$ را حل کنیم.

$$h(t) = 13 \Rightarrow -5t^2 + 18t + 13 = 13 \Rightarrow -5t^2 + 18t = 0$$

$$t(-5t + 18) = 0 \Rightarrow t = 0 \text{ یا } t = \frac{18}{5} = 3\frac{3}{5}$$

با توجه به شکل، $t = 0$ مربوط به نقطه A است، پس: $t_B = 3\frac{3}{5}$



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در حال بازگشت به زمین $h = 0$ است.

$$12 \cdot t - 4t^2 = 0 \Rightarrow t = 3$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(-1) = a(-1)^2 + b(-1) + c = 2 \Rightarrow a - b + c = 2$$

$$x' \cdot x'' = \frac{c}{a} = -3 \Rightarrow c = -3a$$

$$x' = \frac{-b}{2a} = -1 \Rightarrow b = 2a$$

$$a - 2a - 3a = 2 \Rightarrow -4a = 2 \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \Rightarrow b = -1, c = \frac{3}{2}$$

در نتیجه:

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2}$$

بنابراین:

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. طول رأس سهمی، در حقیقت محل گذر خط محور تقاوت آن سهمی است که معادله‌ی محور تقارن این سهمی، برابر است با:

$$x = \frac{-3 + 5}{2} = 1$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نمودار تابع محور x ها را در نقاط $x = 3$ و $x = 1$ قطع کرده است، پس ضابطه‌ی تابع را

می‌توان به صورت $y = a(x-1)(x-3)$ نوشت. از طرفی نمودار تابع، محور عرض‌ها را در $y = 2$ قطع کرده است، لذا داریم:

$$\xrightarrow{x=0, y=2} 2 = a(0-1)(0-3) \Rightarrow 2 = 3a \Rightarrow a = \frac{2}{3}$$

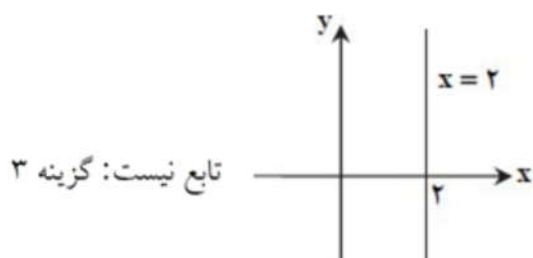
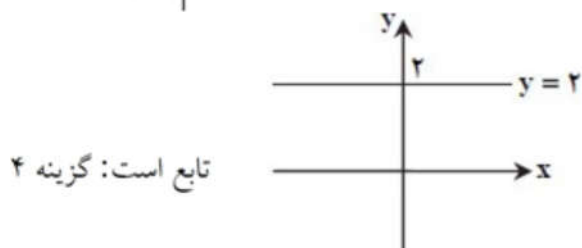
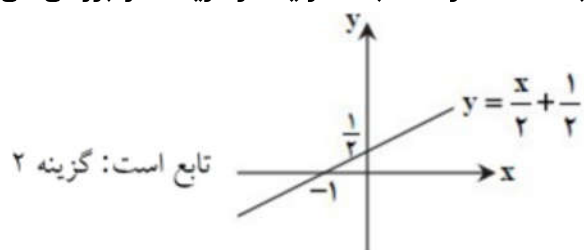
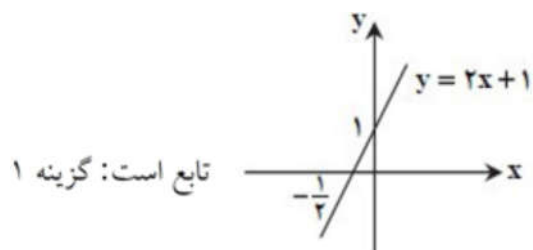
$$\Rightarrow y = \frac{2}{3}(x-1)(x-3) = \frac{2}{3}(x^2 - 4x + 3) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + 2$$

$$\Rightarrow y_{\min} = \frac{-\Delta}{4a} = -\frac{\left(\frac{8}{3}\right)^2 - 4 \times \frac{2}{3} \times 2}{4 \times \frac{2}{3}} = -\frac{\frac{64}{9} - \frac{16}{3}}{\frac{8}{3}} = -\frac{\frac{16}{9}}{\frac{8}{3}} \Rightarrow y_{\min} = -\frac{2}{3}$$

همچنین برای پیدا کردن $y_{\min}$ می‌توانید طول رأس سهمی، یعنی $x = \frac{1+3}{2} = 2$ را در ضابطه قرار دهید.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

نکته: یک رابطه که با نمودار مختصاتی نشان داده شده است در صورتی تابع است که هر خط موازی محور y ها نمودار آن را حداکثر در یک نقطه قطع کند.
با استفاده از نکته بالا، هر یک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم.

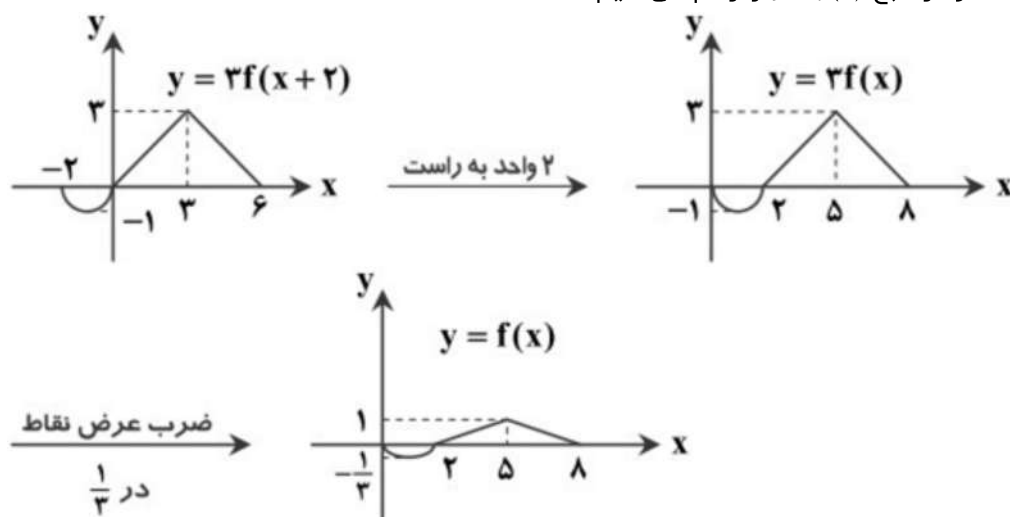


بنابراین گزینه ۳ پاسخ است.

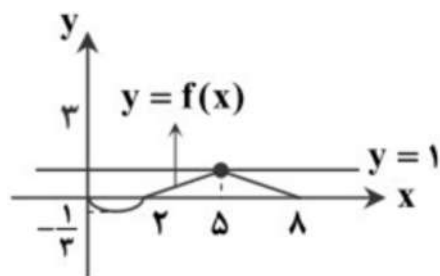
گزینه ۱ پاسخ صحیح است. نکته: با فرض $k > 0$ ، برای رسم نمودار $y = kf(x)$ کافی است عرض هر نقطه روی نمودار تابع $y = f(x)$ را k برابر کنیم.

نکته: با فرض $a > 0$ ، اگر نمودار $y = f(x)$ را a واحد به سمت راست (چپ) انتقال دهیم، ضابطه تابع به صورت $y = f(x - a)$ ($y = f(x + a)$) درمی آید.

ابتدا با استفاده از نکات بالا، نمودار تابع $y = f(x)$ را رسم می‌کنیم:



بنابراین نمودار تابع $f(x)$ ، نمودار $y = 1$ را در یک نقطه قطع می‌کند.



گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$y = ax^2 + bx + c \begin{cases} (0, 3) \rightarrow c = 3 \\ (1, -3) \rightarrow -3 = a + b + 3 \Rightarrow a + b = -6 \\ (2, 3) \rightarrow 3 = 4a + 2b + 3 \Rightarrow 4a + 2b = 0 \Rightarrow b = -2a \end{cases}$$

$$\Rightarrow a + (-2a) = -6 \Rightarrow -a = -6 \Rightarrow a = 6 \xrightarrow{b = -2a} b = -12$$

$$y = 6x^2 - 12x + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_A = \frac{6+3\sqrt{2}}{6} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x_B = \frac{6-3\sqrt{2}}{6} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow x_A + x_B = 2$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$y = x^2 - mx + 4$$

$x = 1$ محور تقارن سهمی، در نتیجه:

$$\frac{-b}{2a} = 1 \Rightarrow \frac{m}{2} = 1 \Rightarrow m = 2$$

$$x_S = \frac{-b}{2a} = 1 \xrightarrow{y = x^2 - 2x + 4} y_S = 1 - 2 + 4 = 3$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. $f(x)$ را دو واحد به راست منتقل می‌کنیم بنابراین به جای x ، $x - 2$ و سه واحد به بالا منتقل می‌کنیم باید کل را ۳ واحد افزایش دهیم.

$$g(x) = 3(x - 2) + 1 + 3$$

$$g(x) = 3x - 6 + 4$$

$$g(x) = 3x - 2$$

$$g^{-1}(4) = a \Rightarrow g(a) = 4 \Rightarrow 3a - 2 = 4 \Rightarrow 3a = 6 \Rightarrow a = 2$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. باید تابع $f(x)$ را کوچکتر از ۱- قرار دهیم.

$$f(x) < -1 \Rightarrow \frac{1}{5}x^2 - x + \frac{3}{5} < -1 \xrightarrow{\times 5} x^2 - 5x + 3 < -5 \Rightarrow x^2 - 5x + 10 < 0$$

$$\Rightarrow (x - 2)(x - 5) < 0 \Rightarrow 2 < x < 5 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 5 \end{cases}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. باید تابع $f(x)$ را کوچکتر از ۱ قرار دهیم.

$$f(x) < 1 \Rightarrow \frac{1}{3}x^2 - x - \frac{25}{3} < 1 \xrightarrow{\times 3} x^2 - 3x - 25 < 3 \Rightarrow x^2 - 3x - 28 < 0$$

$$\Rightarrow (x - 7)(x + 4) < 0 \Rightarrow -4 < x < 7 \Rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 7 \end{cases} \Rightarrow b - a = 7 - (-4) = 11$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(1) = 7 \Rightarrow a + 2a + b = 7 \Rightarrow 3a + b = 7$$

$$f(5) = 19 \Rightarrow 5a + 2a + b = 19 \Rightarrow 7a + b = 19$$

$$\begin{cases} -3a - b = -7 \\ 7a + b = 19 \end{cases} \Rightarrow 4a = 12 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow b = -2$$

$$f(x) = 3x + 6 - 2 \Rightarrow f(x) = 3x + 4 \xrightarrow{b=-2} f(-2) = 3(-2) + 4 = -2 \Rightarrow c = -2$$

$$a + b + c = 3 - 2 - 2 = -1$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بررسی گزینه‌ها:

۱) نمودار سهمی $y = a - 5(x+3)^2$ اولاً رو به پایین است، ثانیاً مختصات رأس آن $S(-3, a)$ می‌باشد. حال اگر $a < 0$ باشد، رأس سهمی در ناحیه‌ی سوم قرار دارد و نمودارش به صورت مقابل است که محور x ها را قطع نمی‌کند. پس این گزینه صحیح است.

۲) برای آن‌که رأس سهمی $y = 2ax^2 - x(x-1)$ ، بالاترین نقطه‌ی سهمی باشد، باید ضریب x^2 منفی باشد. پس داریم:

$$y = 2ax^2 - x(x-1) \Rightarrow y = 2ax^2 - x^2 + x \Rightarrow y = \underbrace{(2a-1)}_{\text{ضریب } x^2} x^2 + x$$

$$\Rightarrow 2a - 1 < 0 \Rightarrow a < \frac{1}{2}$$

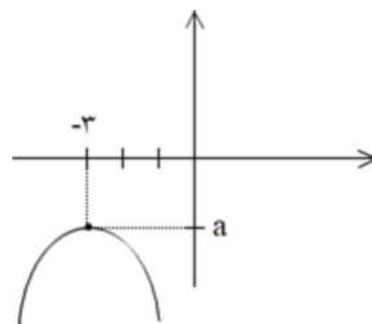
پس این گزینه صحیح است.

۳) در سهمی به معادله‌ی $y = ax^2 + bx$ ، طول رأس سهمی برابر $x_s = \frac{-b}{2a}$ است که اگر مقدار a تغییر کند، مخرج کسر $\frac{-b}{2a}$ تغییر کرده و لذا طول رأس سهمی تغییر می‌کند و مختصات رأس سهمی عوض می‌شود. پس این گزینه نادرست بوده و جواب تست است.

۴) اگر نقاط A و B روی سهمی بوده و دارای عرض یکسان باشد، معادله‌ی محور تقارن سهمی برابر است با:

$$x = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1 + 5}{2} = 3$$

پس این گزینه صحیح است.



گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} f(2) = 5 \\ f(x+2) = f(x) + 2 \xrightarrow{x=2} f(2+2) = f(2) + 2 \Rightarrow f(4) = 5 + 2 = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(2) = 5 \\ f(4) = 7 \end{cases} \xrightarrow{f(x)=ax+b} \begin{cases} f(2) = 2a + b \\ f(4) = 4a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + b = 5 \\ 4a + b = 7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow f(x) = x + 3$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. معادله سهمی را به صورت $y = ax^2 + bx + c$ در نظر می‌گیریم:

$$\xrightarrow{(0, -2)} -2 = a \times 0^2 + b \times 0 + c \Rightarrow c = -2$$

$$\xrightarrow{(-1, 0)} 0 = a \times (-1)^2 + b \times (-1) - 2 \Rightarrow a - b = 2$$

$$\xrightarrow{(2, 0)} 0 = a \times (2)^2 + b \times 2 - 2 \Rightarrow 4a + 2b = 2$$

$$\begin{cases} 3a - 2b = 6 \\ 4a + 2b = 2 \end{cases}$$

$$12a = 8 \Rightarrow a = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} - b = 2 \Rightarrow b = \frac{2}{3} - 2 = \frac{2-6}{3} = -\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow y = \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - 2$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f \text{ هم‌انی} \Rightarrow f(x) = x$$

$$g \text{ ثابت} \Rightarrow g(x) = k$$

$$g^2(0) - g(1) = f(g(2)) \Rightarrow k^2 - k + 1 = g(2) \Rightarrow k^2 - k + 1 = k$$

$$\Rightarrow k^2 - 2k + 1 = 0 \Rightarrow (k-1)^2 = 0 \Rightarrow k = 1$$

$$g(f(-1)) = g(-1) = k = 1 \quad \text{و بنابراین:}$$

بنابراین داریم:

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

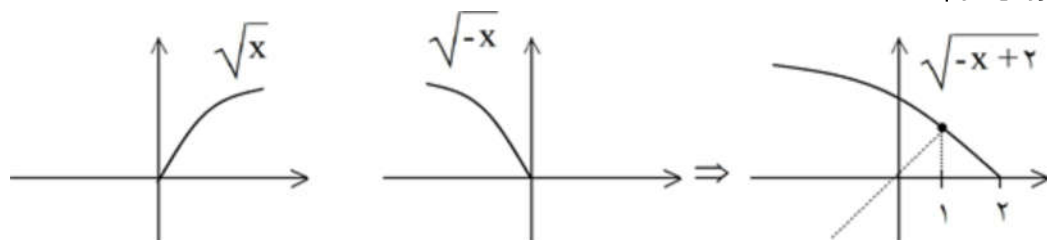
$$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f(-x) = \sqrt{-x} \xrightarrow{\text{انتقال}} f(2-x) = \sqrt{-x+2}$$

$$y = x \text{ محل برخورد با } \sqrt{-x+2} = x \Rightarrow x^2 = -x+2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(x+2) = 0 \quad \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$x = 1 \Rightarrow \sqrt{-1+2} = 1 \checkmark \quad x = -2 \Rightarrow \sqrt{-(-2)+2} = -2 \times$$

روش دوم:



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. هرگاه سهمی خط $y = k$ را در دو نقطه α و β قطع کند معادله آن برابر است با:

$$y = a(x-\alpha)(x-\beta) + k \Rightarrow y = a(x+2)(x-5) - 2 \xrightarrow{(1, 4)}$$

$$44 = a(4)(-4) - 2 \Rightarrow -16a = 46 \Rightarrow a = -\frac{23}{8}$$

$$mx^2 + 2x + 1 = 2x^2 - (m+1)x + 4 \Rightarrow (m-2)x^2 + (4+m)x - 3 = 0$$

$$\Delta = (4+m)^2 + 12(m-2) > 0$$

$$m^2 + 4m + 16 + 12m - 24 > 0 \Rightarrow m^2 + 16m - 8 > 0 \Rightarrow m = \frac{-16 \pm \sqrt{16^2 + 32}}{2}$$

در نتیجه:

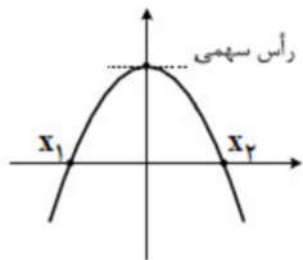
$$m = -16 + \sqrt{16^2 + 32} = -16 + 6\sqrt{3}$$

بنابراین:

$$m = -16 - \sqrt{16^2 + 32} = -16 - 6\sqrt{3}$$

$$m^2 + 16m - 8 > 0 \Rightarrow m < -16 - 6\sqrt{3} \text{ یا } m > -16 + 6\sqrt{3}$$

$$m < -20/39 \text{ یا } m > 0/39$$



$$x_1 = -x_2$$

$$-x^2 + \frac{16}{3}x + \frac{32}{3} > 2x + |x|$$

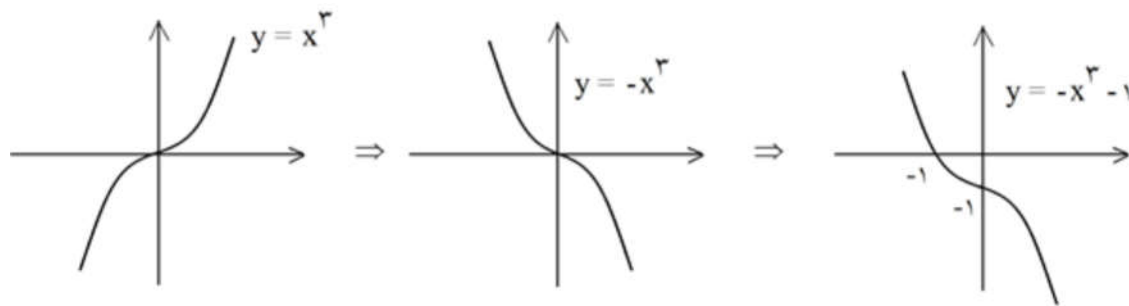
$$x \geq 0 \Rightarrow -x^2 + \frac{16}{3}x + \frac{32}{3} > 4x \Rightarrow -x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{32}{3} > 0 \xrightarrow{\times(-3)} 3x^2 - 4x - 32 < 0$$

$$\Rightarrow (x-4)(3x+8) < 0 \Rightarrow -\frac{8}{3} < x < 4 \xrightarrow{\cap x \geq 0} 0 \leq x < 4 \quad (1)$$

$$x < 0 \Rightarrow -x^2 + \frac{16}{3}x + \frac{32}{3} > 2x \Rightarrow -x^2 + \frac{10}{3}x + \frac{32}{3} > 0 \xrightarrow{\times(-3)} 3x^2 - 10x - 32 < 0$$

$$\Rightarrow (x+2)(3x-16) < 0 \Rightarrow -2 < x < \frac{16}{3} \xrightarrow{\cap x < 0} -2 < x \leq 0 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1) \cup (2)} \text{مجموعه جواب} = (-2, 4) \Rightarrow \text{مرکز بازه} = \frac{-2+4}{2} = 1$$



با توجه به نمودار رسم شده، تابع از ربع اول عبور نمی‌کند.

$$f(a) \leq f(b) \Leftrightarrow a \leq b$$

$$(f(a) < f(b) \Leftrightarrow a < b, f(a) = f(b) \Leftrightarrow a = b)$$

پس در این تابع داریم:

$$\frac{x-1}{x^2+1} \leq \frac{x-1}{2} \Rightarrow \frac{x-1}{x^2+1} - \frac{x-1}{2} \leq 0 \Rightarrow \frac{2(x-1) - (x-1)(x^2+1)}{2(x^2+1)} \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x-1)(2-x^2-1)}{2(x^2+1)} \leq 0 \xrightarrow{2(x^2+1) > 0} (x-1)(1-x^2) \leq 0$$

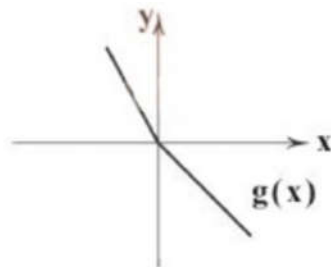
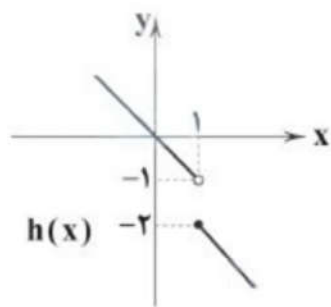
$$\Rightarrow \underbrace{(x-1)^2(-x-1)}_{P(x)} \leq 0$$

x	-1	1
P(x)	+	-

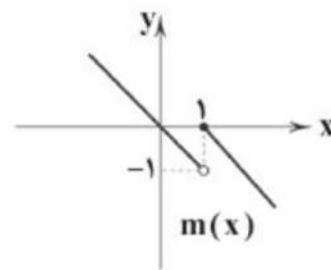
$$P(x) \leq 0 \Rightarrow x \geq -1$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. تابع $y = |x|$ در فاصله $(-\infty, 0)$ نزولی اکید و در فاصله $(0, +\infty)$ صعودی اکید است، اما در مورد توابع $g(x)$ و $h(x)$ داریم:

$$g(x) = -2x + |x| = \begin{cases} -x & x \geq 0 \\ -3x & x < 0 \end{cases}$$



تابع g روی R نزولی اکید است. در مورد تابع $h(x)$ هر دو ضابطه نزولی اکید است، روی R نیز نزولی اکید است.



در تابع $m(x)$ هر دو ضابطه نزولی اکید است، اما روی R نه صعودی و نه نزولی است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر باقی‌مانده را به صورت $R(x) = ax^2 + bx + c$ در نظر بگیریم، آن‌گاه:

$$x^2 = (x^2 - x)q(x) + ax^2 + bx + c = x(x-1)(x+1)q(x) + ax^2 + bx + c$$

رابطه‌ی بالا یک اتحاد است و به ازای هر x برقرار است. اعدادی که مقسوم‌علیه را صفر می‌کنند، را انتخاب می‌کنیم:

$$x = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$x = 1 \Rightarrow 1 = a + b + c \xrightarrow{c=0} a + b = 1$$

$$x = -1 \Rightarrow 1 = a - b + c \xrightarrow{c=0} a - b = 1$$

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ a - b = 1 \end{cases} \Rightarrow a = 1, b = 0 \Rightarrow R(x) = x^2$$

۹۴

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. برای آن که تابع f در فاصله $(۰, ۴)$ یکنوای اکید نباشد، باید رأس سهمی در این بازه قرار گیرد:

$$۰ < \frac{-1}{۲} < ۴ \Rightarrow ۰ < \frac{1}{۲a} < ۴ \xrightarrow{\text{عکس}} ۲a > \frac{1}{۴} \Rightarrow a > \frac{1}{۸}$$

۹۵

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اگر عملیات گفته شده در سؤال را اعمال کنیم به تابع $۱ + \sqrt{x+1}$ می‌رسیم. حال دو تابع را برابر با هم قرار می‌دهیم تا نقطه‌ی برخورد را محاسبه کنیم:

$$۱ + \sqrt{x+1} = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{توان دو}} ۱ + x + ۱ + ۲\sqrt{x+1} = x \Rightarrow ۱ + \sqrt{x+1} = ۰$$

$\Rightarrow$ معادله فاقد ریشه است.

پس نمودارهای دو تابع یکدیگر را قطع نمی‌کنند.

۹۶

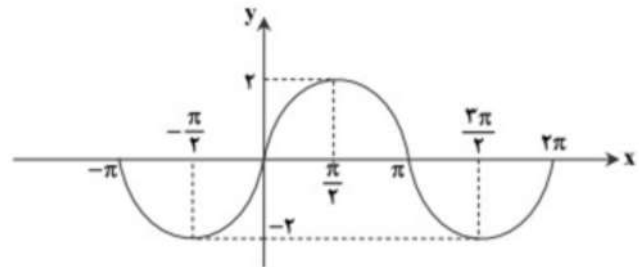
گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

نکته: تابع $f(x)$ را اکیداً نزولی می‌نامیم، هرگاه برای هر دو نقطه‌ی x_1 و x_2 از دامنه‌اش که $x_1 < x_2$ داشته باشیم:

$$f(x_1) > f(x_2)$$

نمودار تابع $f(x)$ در شکل مقابل رسم شده است.

در بین گزینه‌ها، این تابع فقط در بازه‌ی $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ اکیداً نزولی است.



۹۷

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

نکته: تابع $f(x)$ را صعودی می‌نامیم هرگاه برای هر دو نقطه‌ی x_1 و x_2 از دامنه‌اش که $x_1 < x_2$ داشته باشیم:

$$f(x_1) \leq f(x_2)$$

x	۱	۳	۵
y	m	$۲m+۱$	$۷m+۲$

ابتدا جدول مقادیر تابع f را شکل می‌دهیم:

اکنون داریم:

$$۱ < ۳ < ۵ \xrightarrow{f \text{ صعودی}} f(۱) \leq f(۳) \leq f(۵) \Rightarrow m \leq ۲m+۱ \leq ۷m+۲ \Rightarrow$$

$$\begin{cases} ۲m+۱ \geq m \Rightarrow m \geq -۱ \\ ۷m+۲ \geq ۲m+۱ \Rightarrow m \geq -\frac{1}{5} \end{cases}$$

اشتراک مجموعه جواب‌های بالا به صورت $\left(-\frac{1}{5}, +\infty\right)$ است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. دامنه و برد تابع $f(x) = \sqrt{x}$ برابر است با:

$$\begin{cases} x \geq 0 \Rightarrow D_f = [0, +\infty) \\ x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow R_f = [0, +\infty) \end{cases}$$

با توجه به اینکه انتقال افقی فقط روی دامنه و انتقال عمودی فقط روی برد تأثیر دارد، دامنه و برد هر یک از گزینه‌ها را به دست می‌آوریم:

گزینه (۱): $f(x+1) - 1$

دامنه: $[0-1, +\infty) = [-1, +\infty)$

برد: $[0-1, +\infty) = [-1, +\infty)$

گزینه (۲): $f(x-1) + 1$

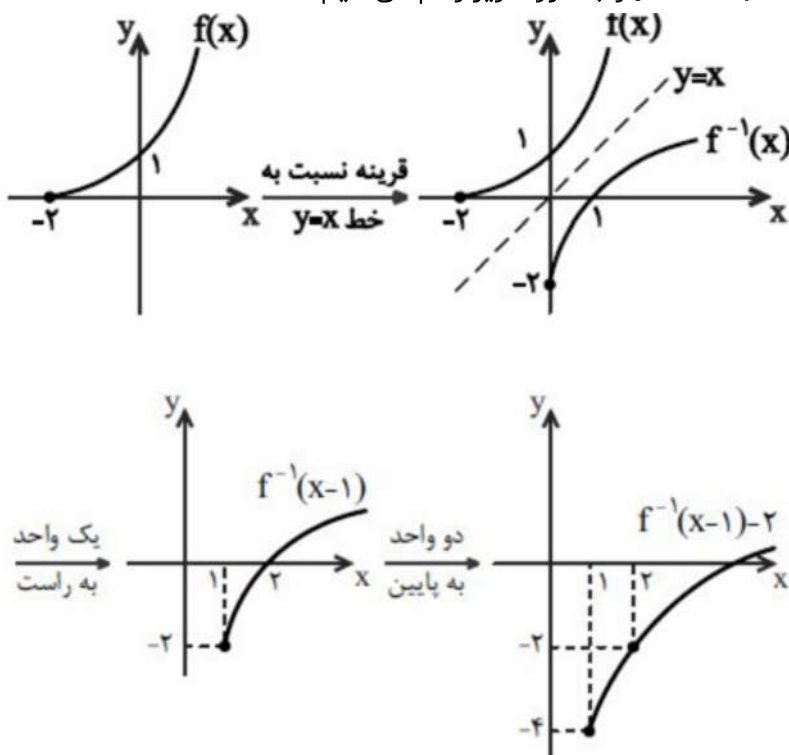
دامنه: $[0+1, +\infty) = [1, +\infty)$

برد: $[0+1, +\infty) = [1, +\infty)$

گزینه (۳): $f(x-2) - 2$

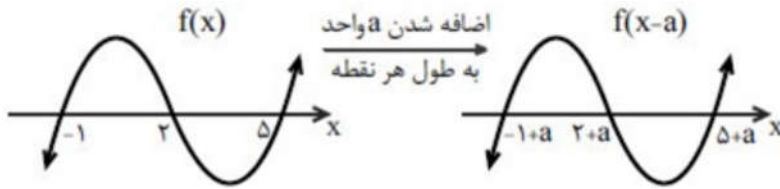
دامنه و برد برابر نیستند $\Rightarrow \left. \begin{matrix} \text{دامنه: } [0+2, +\infty) = [2, +\infty) \\ \text{برد: } [0-2, +\infty) = [-2, +\infty) \end{matrix} \right\}$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نمودار تابع $y = -2 + f^{-1}(x-1)$ را به صورت زیر رسم می‌کنیم.



بنابراین نمودار از ناحیه دوم و سوم عبور نمی‌کند.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. به طول هر نقطه تابع $f(x)$ ، a واحد اضافه می‌شود و تابع $f(x-a)$ تشکیل می‌شود، پس نمودار تابع $f(x-a)$ به صورت زیر خواهد بود:

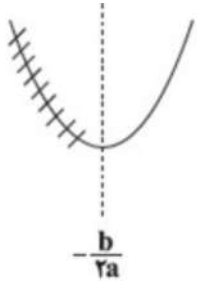


با توجه به نمودار تابع $f(x-a)$ ، ریشه‌های معادله $f(x-a)$ به صورت $x_1 = -1 + a$ ، $x_2 = 2 + a$ و $x_3 = 5 + a$ است، لذا:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow -1 + a + 2 + a + 5 + a = 0$$

$$\Rightarrow 3a + 6 = 0 \Rightarrow a = -2$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. طبق سؤال، دهانه سهمی رو به بالاست. لذا سهمی در $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$ صعودی است.



پس (-2) می‌تواند طول رأس سهمی و یا بزرگ‌تر از طول رأس سهمی باشد.

$$\frac{-b}{2a} \leq -2 \Rightarrow \frac{-k}{6} \leq -2 \Rightarrow -k \leq -12 \Rightarrow k \geq 12$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

تابع $f(x) = a^x$:

به ازای $0 < a < 1$ اکیداً نزولی است.

به ازای $a > 1$ اکیداً صعودی است.

به ازای $a = 0$ و $a = 1$ تابع ثابت و در نتیجه هم صعودی و هم نزولی است.

پس برای آن‌که تابع داده شده نزولی باشد، باید داشته باشیم:

$$0 \leq \frac{3m+1}{4} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 3m+1 \leq 4 \Rightarrow -1 \leq 3m \leq 3 \Rightarrow \frac{-1}{3} \leq m \leq 1$$

در محدوده بالا فقط اعداد صحیح صفر و ۱ قرار می‌گیرند.

$$y = (2a - 1)x^2 - 8x + 6$$

می‌دانیم کمترین (بیشترین) مقدار سهمی در رأس آن اتفاق می‌افتد، بنابراین:

$$\text{مختصات رأس: } \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} \right) \xrightarrow[\text{راس روی محور } x \text{ است}]{y_{\text{راس}} = 0}$$

$$-\frac{\Delta}{4a} = 0 \Rightarrow \Delta = 0$$

$$\Rightarrow (-8)^2 - 4(2a - 1)(6) = 0 \Rightarrow 64 - 48a + 24 = 0$$

$$48a = 88 \Rightarrow a = \frac{88}{48} = \frac{11}{6}$$

$$\Rightarrow y = \frac{11}{6}x^2 - 8x + 6$$

$$\text{معادله محور تقارن: } x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-8}{2 \times \frac{11}{6}} = \frac{24}{11}$$

$$f(x) = (x + 1)^2 \xrightarrow[\text{واحد به پایین}]{\text{واحد به راست}} g(x) = (x - 1)^2 - 1$$

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = x^2 - 2x + 1 - 1$$

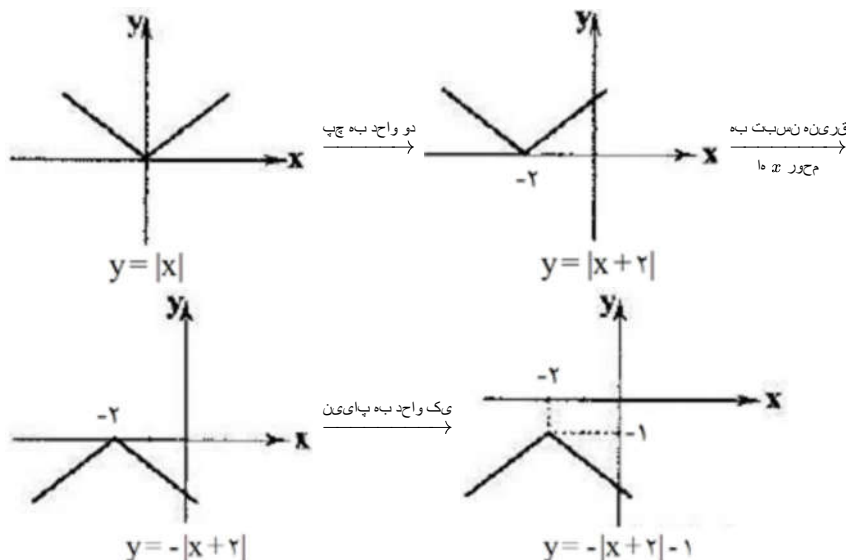
$$\Rightarrow 4x = -1 \Rightarrow x = \frac{-1}{4}$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{-1}{4}\right) = g\left(\frac{-1}{4}\right) = \frac{9}{16}$$

نمودار $y = (x + 1)^2 + 4$ را می‌توان ابتدا ۱ واحد به سمت راست $(x \rightarrow x - 1)$ منتقل کرد. در این حالت به نمودار

$y = x^2 + 4$ می‌رسیم. سپس می‌توان نمودار جدید را ۴ واحد به پایین منتقل نمود و به نمودار $y = x^2$ رسید.

ابتدا نمودار تابع $f(x) = |x|$ را رسم نموده و انتقال‌ها را براساس آن انجام می‌دهیم:



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. عبارت داده شده را به صورت چندجمله‌ای تبدیل می‌کنیم:

$$f(x) = x^3 - 2m(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + 8x^2 + 1$$

$$\Rightarrow f(x) = (1 - 2m)x^3 + (6m + 8)x^2 - 6mx + 2m + 1$$

چون چندجمله‌ای از درجه‌ی دوم است، پس باید ضریب جمله‌ی درجه‌ی سوم برابر صفر باشد:

$$1 - 2m = 0 \Rightarrow 2m = 1 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

اگر $m = \frac{1}{2}$ باشد، در این صورت داریم:

$$f(x) = \left(6 \times \frac{1}{2} + 8\right)x^2 - 6 \times \frac{1}{2}x + 2 \times \frac{1}{2} + 1 = 11x^2 - 3x + 2$$

بنابراین ضریب x^2 برابر ۱۱ خواهد بود.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. عبارت داده شده را خلاصه می‌کنیم:

$$f(x) = (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) - (x^3 + 6x^2 + 12x + 8) + mx^2 + nx + 5$$

$$\Rightarrow f(x) = (3 - 6 + m)x^2 + (3 - 12 + n)x + 1 - 8 + 5 \Rightarrow f(x) = (m - 3)x^2 + (n - 9)x - 2$$

نمودار داده شده، یک نمودار خطی (تابع درجه اول) است، پس باید ضریب x^2 برابر صفر شود:

$$m - 3 = 0 \Rightarrow m = 3 \Rightarrow f(x) = (n - 9)x - 2$$

تابع از نقطه‌ی $(-3, 0)$ عبور می‌کند، پس:

$$f(-3) = 0 \Rightarrow (n - 9)(-3) - 2 = 0 \Rightarrow n - 9 = -\frac{2}{-3} \Rightarrow n = 9 - \frac{2}{-3} = \frac{25}{3} \Rightarrow f(x) = -\frac{2}{3}x - 2$$

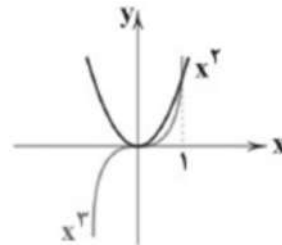
عدد p محل برخورد خط با محور y هاست، پس کافی است x را برابر صفر قرار دهیم:

$$f(0) = -2 = p$$

$$m + 2n + p = 3 + 25 - 2 = 26$$

بنابراین:

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. دو تابع x^2 و x^3 در نقاط $x = 0$ و $x = 1$ متقاطع‌اند و نمودار آن‌ها به صورت زیر

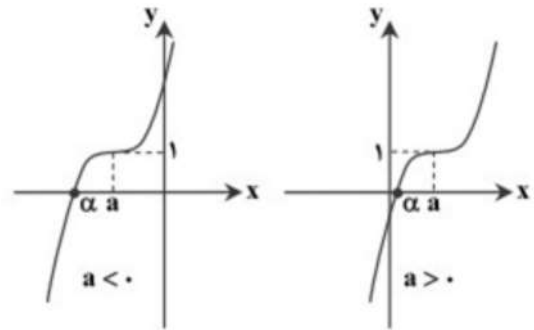


است:

ملاحظه می‌کنیم که تابع x^2 در فاصله‌ی $(0, 1)$ بالاتر از تابع x^3 قرار دارد، پس الف صحیح است، همچنین در فاصله‌ی $(1, +\infty)$ تابع x^3 بالاتر از x^2 قرار می‌گیرد، پس ب نیز صحیح است. با توجه به شکل، تابع x^2 در مجموعه‌ی اعداد منفی همواره بالاتر از x^3 قرار دارد، پس ج نادرست است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا تابع $y = f(x) + |f(x)|$ را تشکیل می‌دهیم.

نمودار f با فرض $a > 0$ یا $a < 0$ به صورت زیر است:



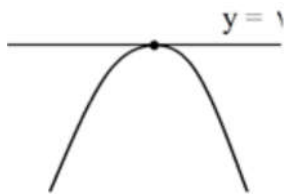
اگر بخواهیم تابع y اکیداً صعودی باشد، باید تابع f حتماً نامنفی باشد. زیرا اگر تابع f منفی باشد، مقدار آن در تابع y صفر می‌شود که یک تابع اکیداً صعودی نیست. پس تابع f حتماً باید در بازه $[1, +\infty)$ نامنفی باشد یا به عبارت دیگر نقطه α باید از عدد ۱ بزرگتر نباشد. از طرفی $f(\alpha) = 0$ است. پس می‌توان نوشت:

$$f(\alpha) = 0 \Rightarrow (\alpha - a)^2 + 1 = 0 \Rightarrow (\alpha - a)^2 = -1 \Rightarrow \alpha - a = -1$$

$$\Rightarrow \alpha = a - 1 \Rightarrow \alpha \leq 1 \Rightarrow a - 1 \leq 1 \Rightarrow a \leq 2$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در سؤال گفته شده که نقطه‌ی ماکزیمم روی خط $y = 1$ قرار دارد، پس شکل زیر را در نظر

می‌گیریم:



$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 < 0 \\ y_{\max} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < 0 \quad (1) \\ -\frac{\Delta}{4A} = 1 \quad (2) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(2)} \Delta = -4A \Rightarrow B^2 - 4AC = -4A \xrightarrow[A=a]{A=a, B=-4\sqrt{2}} 16 \times 2 - 4 \times a^2 = -4a$$

$$\Rightarrow 4a^2 - 4a - 32 = 0 \xrightarrow{\div 4} a^2 - a - 8 = 0 \Rightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{2} \quad (3)$$

$$\xrightarrow{(2), (1)} a = \frac{1 - \sqrt{33}}{2}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

نکته: در تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $(x - a)$ باقی‌مانده برابر $f(a)$ است.

با توجه به نکته، باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $f(x)$ برابر $x + 1 = x - (-1)$ برابر است با:

$$R = f(-1) = 2(-1)^4 + 3(-1)^3 - 4(-1)^2 - 5(-1) + 1 = 2 - 3 - 4 + 5 + 1 = 1$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با انجام مراحل بیان شده در سؤال داریم:

$$y = f(x) \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } y} y = f(-x)$$

$$\xrightarrow{\text{انتقال واحد به طرف راست}} y = f(-(x - 2)) = f(-x + 2)$$

$$\xrightarrow{\text{انعکاس عمودی}} y = 2f(-x + 2)$$

با ضریب ۲

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $x+2$ برابر $P(-2)$ و بر $x-1$ برابر $P(1)$ است.

$$\begin{cases} P(-2) = 0 \\ P(1) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -8 - 2a + b = 0 \\ 1 + a + b = 3 \end{cases} \xrightarrow{(-)} 9 + 3a = 3 \Rightarrow a = -2$$

$$a + b = 2 \xrightarrow{a=-2} b = 4 \Rightarrow P(x) = x^2 - 2x + 4$$

باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $x+1$ برابر $P(-1)$ است:

$$P(-1) = (-1)^2 - 2(-1) + 4 = 5$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۱۵

$$x^2 + ax^2 + bx + 3 - a = (x-2)(x+1) \cdot Q(x)$$

$$x = 2 \Rightarrow 3a + 2b + 11 = 0$$

$$x = -1 \Rightarrow -1 + a - b + 3 - a = 0 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow a = -5$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر پایین‌تر از محور x ها است. این یعنی دهانه سهمی رو به بالا $(2a+1) > 0$ و $\Delta \leq 0$

باشد، بنابراین داریم:

$$\Delta \leq 0 \xrightarrow{(-)} (-4)^2 - 4 \times 1 \times (2a+1) \leq 0 \Rightarrow 16 - 8a - 4 \leq 0$$

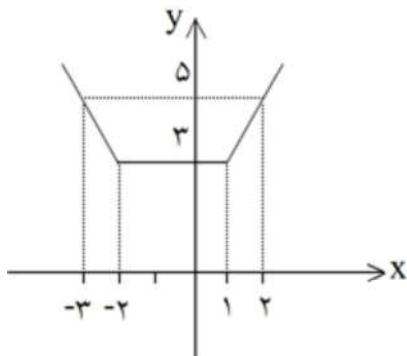
$$\Rightarrow -8a \leq -12$$

$$\Rightarrow a \geq \frac{3}{2} \quad (1)$$

$$2a+1 > 0 \Rightarrow a > -\frac{1}{2} \quad (2) \left\{ \xrightarrow{(1) \cap (2)} a \in \left[\frac{3}{2}, +\infty \right) \right.$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. نمودار تابع را به کمک نقطه‌یابی رسم می‌کنیم. ۱۱۷

$$y = |x+2| + |x-1|$$



نقاط شکست

x	-3	-2	1	2
y	5	3	3	5

پس تابع درفاصله‌ی $(-\infty, -2)$ اکیداً نزولی است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۱۸

$$f(x) = \begin{cases} -(2x-8) + (x+3) = -x+11 & \text{و } x < -3 \\ -(2x-8) - (x+3) = -3x+5 & \text{و } -3 \leq x \leq 4 \\ (2x-8) - (x+3) = x-11 & \text{و } x > 4 \end{cases}$$

بنابراین تابع در بازه $x > 4$ اکیداً صعودی است (خط با شیب مثبت)

$$y = x - 11 \Rightarrow x = y + 11 \xrightarrow{\text{جای } x \text{ و } y \text{ را عوض می‌کنیم}} y = x + 11$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = x + 11$$

برای تعیین دامنه f^{-1} ، برد f را در این بازه تعیین می‌کنیم:

$$y = x - 11 \xrightarrow{x > 4} x - 11 > 4 - 11 \Rightarrow x - 11 > -7 \Rightarrow f(x) > -7$$

برد تابع f در این بازه، همان دامنه f^{-1} می‌باشد.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

الف) غلط، مثال نقیض تابع $y = [x]$ که صعودی است ولی یک به یک نیست.ب) غلط، مثال نقض تابع $y = \frac{1}{x}$ است که یک به یک است ولی یکنوا نیست.

ج) این جمله کاملاً درست است.

د) غلط، مثال نقضش همان $y = \frac{1}{x}$ است.

هـ) این هم براساس متن کتاب درسی کاملاً درست است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\sqrt{2x} \xrightarrow{\text{نقاط دامنه قرینه}} \sqrt{-2x} \xrightarrow{x \rightarrow x-1} \sqrt{-2(x-1)}$$

$$\sqrt{2x} = \sqrt{-2(x-1)} \Rightarrow 2x = -2x + 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$P(x) = (x-1)^2 Q(x) + 2x - 3$$

$$x=1 \Rightarrow P(x) = 2 - a = -1 \Rightarrow a = 3$$

باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ بر $x+1$ برابر $P(-1)$ است.

$$P(-1) = -6 - a = -9$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. $f(x) = x^2 + 1$ را در نظر بگیرید. مراحل زیر را انجام می‌دهیم.۱) x را به $x+1$ تبدیل می‌کنیم. (یک واحد انتقالی طولی)

$$f(x+1) = (x+1)^2 + 1 = x^2 + 2x + 2$$

۲) $f(x+1) + 1$ را به $f(x+1)$ تبدیل می‌کنیم. (یک واحد انتقالی عرضی)

$$1 + f(x+1) = x^2 + 2x + 3$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$y = x^2 - 1 \xrightarrow[\text{به چپ}]{\text{انتقال یک واحد}} y = (x+1)^2 - 1$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{3} \text{ ضرب با}]{\text{قرینه نسبت به محور } y} y = (-2x+1)^2 - 1$$

$$= (2x-1)^2 - 1 = 4x^2 - 4x$$

حال تابع به دست آمده را با خط $y = x$ تلاقی می‌دهیم. داریم:

$$4x^2 - 4x = x \Rightarrow 4x^2 - 5x = x(4x - 5) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{5}{4} \end{cases}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا دامنه و برد تابع $y = f(x)$ را حساب می‌کنیم:

$$-2 < x \leq 3 \Rightarrow -3 < x-1 \leq 2 \Rightarrow D_f = (-3, 2]$$

$$-1 \leq 2f(x-1) < 2 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq f(x-1) < 1$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} \leq f(x) < 1 \Rightarrow R_f = \left[-\frac{1}{2}, 1\right)$$

حال دامنه و برد تابع $y = -f\left(\frac{x}{2}\right)$ را حساب می‌کنیم:

$$-3 < \frac{x}{2} \leq 2 \Rightarrow -6 < x \leq 4 \Rightarrow \text{دامنه: } D = (-6, 4]$$

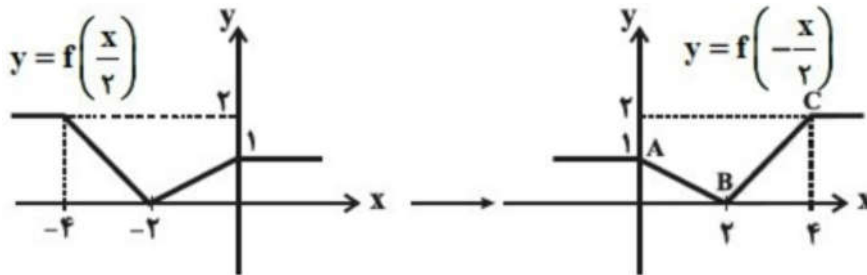
$$-\frac{1}{2} \leq f(x) < 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq f\left(\frac{x}{2}\right) < 1 \Rightarrow -1 < -f\left(\frac{x}{2}\right) \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 3 < -f\left(\frac{x}{2}\right) + 4 \leq \frac{9}{2} \Rightarrow \text{برد: } R = \left(3, \frac{9}{2}\right]$$

$$\Rightarrow R \cap D = (3, 4] \cap (-6, 4] = (3, 4]$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اگر طول نقاط تابع $y = f(x)$ را دو برابر کرده و سپس آن را نسبت به محور y ها قرینه کنیم،

نمودار تابع $y = f\left(-\frac{x}{2}\right)$ حاصل می‌شود.



$$AB = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$$BC = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow AB + BC = 2\sqrt{2} + \sqrt{5}$$

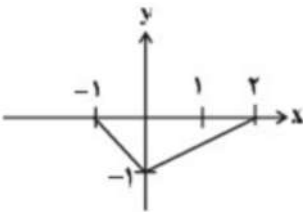
گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

با توجه به اینکه در تابع $f(x)$ ، $-4 \leq x \leq 2$ است پس داریم:

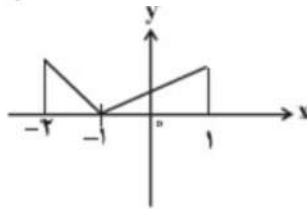
$$-4 \leq -3x + 2 \leq 2 \Rightarrow -6 \leq -3x \leq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 2$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۲۷

حالت نمودار $f(-1-x) + 1$ را به



ابتدا نمودار تابع $f(-x)$ را رسم می‌کنیم:



صورت مقابل رسم می‌کنیم:

دامنه‌ی تابع کسری y از اشتراک دامنه‌های تابع صورت و تابع مخرج، منهای ریشه‌های تابع مخرج به دست می‌آید،

$$D_y = [-2, 1] \cap [-2, 1] - \{-2, 1\} = (-2, 1) \quad \text{بنابراین:}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۲۸

$$f(x) = \sqrt{x-1} \xrightarrow[\text{محور } y]{\text{قرینه نسبت به}} y = \sqrt{-x-1}$$

$$\xrightarrow[\text{واحد به راست } 4]{x \rightarrow x-4} y = \sqrt{-(x-4)-1} = \sqrt{3-x} = g(x)$$

حال g را با محور طول‌ها تقاطع می‌دهیم.

$$g(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{3-x} = 0 \Rightarrow x = 3$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. باقی‌مانده تقسیم $f(x)q(x)$ بر $2x+2$ برابر $f(-1)q(-1)$ می‌باشد. حال برای تعیین $q(-1)$

۱۲۹

ابتدا باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $2x-2$ را به دست آورده، سپس با نوشتن رابطه تقسیم، مقدار آن را به دست می‌آوریم:

$$2x-2 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow r = f(1) = 1 - 2(1) + 5(1) + 4 = 8$$

$$x^2 - 2x^2 + 5x + 4 = (2x-2)q(x) + 8$$

$$\xrightarrow{x=-1} 1 + 2 - 5 + 4 = -4q(-1) + 8$$

$$\Rightarrow 2 = -4q(-1) + 8 \Rightarrow -6 = -4q(-1) \Rightarrow q(-1) = \frac{3}{2}$$

$$f(-1) = 1 + 2 - 5 + 4 = 2 \Rightarrow f(-1)q(-1) = 2 \times \frac{3}{2} = 3$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اگر $y = f(x)$ را 2 واحد به سمت چپ انتقال دهیم، به $y = f(x+2)$ تبدیل می‌شود. پس

۱۳۰

کافی است که در ضابطه $f(x+1)$ به جای x ، $x+1$ را قرار دهیم:

$$f(x+1) = x^2 - 3x = x(x-3) \Rightarrow f(x+2) = (x+1)(x-2) = x^2 - x - 2$$

حال نمودار جدید را 4 واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم:

$$y = f(x+2) - 4 = x^2 - x - 6$$

تقاطع این نمودار با محور x ها برابر است با:

$$x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+2) = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ و } -2$$

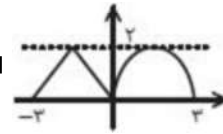
۱۳۱

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



نتیجه می‌گیریم که:

است و با توجه به نمودار

به صورت $f(x)$

$$2k - 1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow k = \frac{1}{4}$$

۱۳۲

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا ضابطه $g(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$g(x) = f(x+1) + 1 \Rightarrow g(x) = \sqrt{1 - 2(x+1)} + 1 = 1 + \sqrt{-2x - 1}$$

بنابراین $g(-5)$ برابر است با:

$$g(-5) = 1 + \sqrt{-2(-5) - 1} = 1 + \sqrt{9} = 1 + 3 = 4$$

۱۳۳

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

می‌بایست معادله‌ی $x^2 - (2+a)x + 2a = 0$ ریشه مضاعف داشته باشد.

$$\Delta = (2+a)^2 - 4a = 0 \Rightarrow a^2 - 4a + 4 = 0 \Rightarrow a = 2$$

۱۳۴

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\frac{(2x-3)^2 + 6(2x^2-5x+3) + 1}{(x-2)^2 + 2x-3} = \frac{(2x-3)^2 + 6(2x-3)(x-1) + 1}{x^2 - 4x + 4 + 2x - 3}$$

$$= \frac{(2x-3)^2 + 2(2x-3)(2x-3+1) + 1}{x^2 - 2x + 1} = \frac{(2x-3+1)^2}{(x-1)^2} = \frac{4(x-1)^2}{(x-1)^2} = 4(x-1)$$

$$x=42573 \rightarrow 340576$$

۱۳۵

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = 2x^2 + ax^2 + ax^2 - 2$$

$$f(-1) = 2 - a + a - 2 = 0$$

$$f'(x) = 4x + 2ax^2 + 2ax$$

$$f'(-1) = 0 \Rightarrow -4 + 2a - 2a = 0 \Rightarrow a = 4$$

شرط آن که چندجمله‌ای $f(x)$ بر $(x-a)^2$ بخش‌پذیر باشد آن است که $f(a) = f'(a) = 0$.

۱۳۶

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

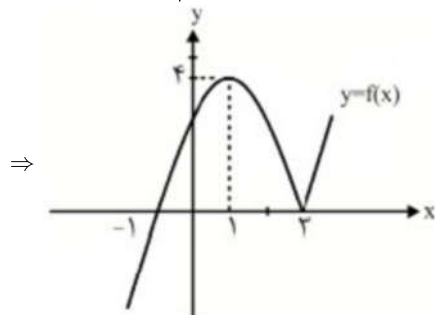
$$x^n - x^{n-1} - (x-1) = x^{n-1}(x-1) - (x-1) = (x-1)(x^{n-1} - 1)$$

عبارت $x^{n-1} - 1$ همواره بر $x-1$ بخش‌پذیر است. بنابراین عبارت $x^n - x^{n-1} - (x-1)$ همواره بر عبارت

$$(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۳۷

$$f(x) = (x+1)\sqrt{x^2 - 7x + 6} \Rightarrow f(x) = (x+1)\sqrt{(x-3)^2} \Rightarrow f(x) = (x+1)|x-3|$$



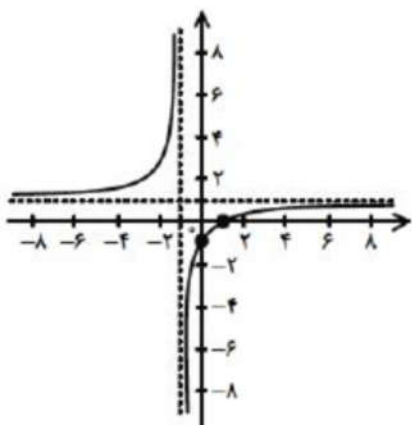
بنابراین تابع در بازه‌ی $[1, 3]$ اکیداً نزولی است. می‌دانیم دامنه‌ی تابع $y = f^{-1}(x)$ برابر برد تابع $f(x)$ است که برد تابع $f(x)$ در این بازه برابر $[0, 4]$ است. پس:

$$[a, b] = [0, 4] \Rightarrow b - a = 4 - 0 = 4$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نمودار این تابع هموگرافیک به شکل زیر است:

$$y = \frac{x-1}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} - \frac{2}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}$$

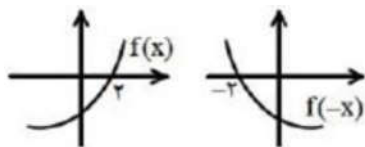
این تابع در فاصله‌های $(-\infty, -1)$ و $(-1, +\infty)$ اکیداً صعودی است.



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۳۹

$$f(2x-1) > f(2x-4) \Rightarrow 2x-1 > 2x-4 \Rightarrow 3 > x$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. نمودار $f(x)$ و $f(-x)$ شکل زیر است. ۱۴۰



برای آن که $(ax+b)f(-x) \geq 0$ باشد باید جدول تعیین علامت $ax+b$ به شکل زیر باشد.

$$\begin{array}{c|c} & -2 \\ \hline ax+b & + \quad 0 \quad - \end{array} \Rightarrow -2a+b=0 \Rightarrow \frac{b}{a}=2$$

$a < 0, \quad a < 0, b < 0$

$$bx-a \geq 0 \Rightarrow bx \geq a \Rightarrow x \leq \frac{a}{b} \Rightarrow x \leq \frac{1}{2}$$

$b < 0$

پس $D_y = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ می‌باشد.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. $f(x)$ بر $x - 1$ بخش پذیر است، پس: $f(1) = 0$. ۱۴۱

$$1 + a - 3 = 0 \Rightarrow a = 2$$

$$f(x) = g(x)(x - 1) \xrightarrow{x=2} f(2) = g(2)$$

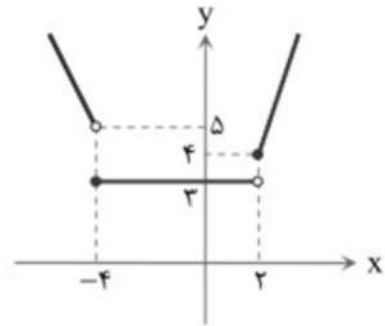
باقی مانده f و g بر $x - 2$ با هم برابر است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۴۲

$$f(-2) = 0 \Rightarrow -32 + 32 - 2a + 6 = 0 \Rightarrow a = 3$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۴۳

نمودار تابع را رسم می کنیم. از روی نمودار مشخص می شود که تابع در بازه $[1, 2]$ وضعیت صعودی دارد ولی اکیداً صعودی نیست زیرا در بازه $[1, 2]$ ثابت است.



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. باید زیر رادیکال نامنفی باشد، پس: ۱۴۴

$$xf(-x) \geq 0 \Rightarrow -xf(-x) \leq 0$$

با تغییر متغیر $-x = t$ باید رابطه $tf(t) \leq 0$ همواره برقرار باشد، پس باید تابعی را انتخاب کنیم که نقاط آن در رابطه $xy \leq 0$ صدق کنند، یعنی نقاط در ربع دوم یا چهارم واقع باشند که نمودار گزینه $\text{«}4\text{»}$ چنین است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۴۵

$$x^3 + x^2 - 7x + a - 1 = 0, x = a - 1 \Rightarrow (a - 1)^3 + (a - 1)^2 - 7(a - 1) + a - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (a - 1)(a^2 - a - 6) = 0 \Rightarrow a = -2 \Rightarrow x^3 + x^2 - 7x - 2 - 1 = (x + 3)(x^2 - 2x - 1)$$

پس باقیمانده برابر صفر است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون $A(-2, a)$ روی $y = f(x)$ است پس $f(-2) = a$ است. نقطه $A(5, 4)$ روی منحنی ۱۴۶

$$f(3 + 5b) = -3 \text{ یا } 4 = 1 - f(3 + 5b)$$

$$\begin{cases} f(-2) = a \\ f(3 + 5b) = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 + 5b = -2 \\ -3 = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -1 \\ a = -3 \end{cases} \Rightarrow a + b = -4$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در عبارت $f(x) = ax^3 + 4x^2 - 14x + 10 - a$ داریم $f(1) = 0$ پس عبارت همواره بر $x - 1$ ۱۴۷

$$f(x) = (x - 1)^2 q(x) \quad \text{بخش پذیر است و داریم:}$$

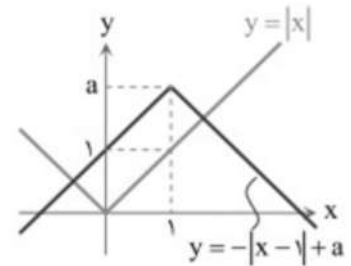
$$f'(x) = 2(x - 1)q(x) + (x - 1)^2 q'(x) \xrightarrow{x=1} f'(1) = 0 \quad \text{از دو طرف مشتق می گیریم:}$$

$$f'(1) = 3a + 8 - 14 = 0 \Rightarrow a = 2 \quad \text{از آن جا که } f'(x) = 3ax^2 + 8x - 14 \text{، داریم:}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اعمال گفته شده را به ترتیب انجام می دهیم:

$$|x| \rightarrow |x-1| \rightarrow -|x-1| \rightarrow -|x-1|+a$$

با توجه به شکل لازم است $a > 1$ باشد، تا دو نمودار در ربع اول و دوم یکدیگر را قطع کنند.



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. کارهای گفته شده را به ترتیب انجام می دهیم:

$$\frac{1}{x} \xrightarrow{\text{یک واحد به راست}} \frac{1}{x-1} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور y}} \frac{1}{-x-1} \xrightarrow{\text{یک واحد به پایین}} \frac{1}{-x-1} - 1 = -\frac{x+2}{x+1}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چون $f(x)$ چندجمله ای از درجه ۳ است، پس باید درجه چهارها حذف شوند و در نتیجه

$m = -1$ خواهد بود و ارگ $g(x)$ چندجمله ای از درجه دوم باشد، باید درجه سومها از بین بروند، پس باید $n = \frac{1}{4}$ باشد.

$$f(x) = x^4 - (x-1)^4 + \frac{1}{4}x^4$$

$$g(x) = (x-1)^2 - (x+1)^2 - 1$$

$$f(2) = 2^4 - 1^4 + \frac{1}{4} \times 4 = 16 - 1 + 1 = 16$$

$$g(2) = 1^2 - 3^2 - 1 = -27$$

$$(f+g)(2) = f(2) + g(2) = 16 - 27 = -11$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

اگر $0 < a < 1$ باشد، آن گاه $f(ax)$ از انبساط افقی $f(x)$ به دست می آید.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$y = f(x) \Rightarrow a = f(2)$$

$$y = 2f\left(\frac{1-x}{\Delta}\right) \Rightarrow 2b = 2f\left(\frac{1-b}{\Delta}\right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{1-b}{\Delta} = 2 \\ \frac{2b}{2} = a \end{cases}$$

پس $b = -9$ و $a = -6$ و در نتیجه $a+b = -15$ است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

اول دامنه $g(x)$ را پیدا می کنیم:

$$-1 \leq x \leq 4 \Rightarrow 0 \leq x+1 \leq 5 \Rightarrow D_g = [0, 5] \quad (I)$$

می دانیم دامنه $g(x)$ با دامنه $g^*(x)$ یکسان است. برای پیدا کردن دامنه $g(x^*)$ باید x^* در فاصله $[0, 5]$ باشد:

$$0 \leq x^* \leq 5 \Rightarrow -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3} \quad (II)$$

دامنه $f(x) = g^*(x) + g(x^*)$ برابر اشتراک دامنه $g^*(x)$ و $g(x^*)$ است.

$$(I) \cap (II) = [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$$

$$f(x-2) = (x-1)q(x) \xrightarrow{x=1} f(-1) = 0 \Rightarrow -1 + a + 4 = 0 \Rightarrow a = -3$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. برای رسم نمودار تابع $g(x) = -(x-1)^2 - 1$ با توجه به نمودار تابع $f(x) = x^2$ باید به ترتیب مراحل زیر را طی کنیم:

$$\begin{aligned} x &\xrightarrow{\text{یک واحد به راست}} (x-1) \xrightarrow[\text{محور } x]{\text{تقریباً نسبت به}} -(x-1)^2 \\ &\xrightarrow{\text{یک واحد به پایین}} -(x-1)^2 - 1 \end{aligned}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. محل برخورد تابع با محور x ها در واقع همان ریشه‌ی تابع یا صفر تابع است، پس $f(-1) = 0$ و داریم:

$$2(-1)^2 + 5m(-1)^2 - (-1) + m + 7 = 0 \Rightarrow -2 + 5m + 1 + m + 7 = 0 \Rightarrow 6m + 6 = 0 \Rightarrow m = -1$$

پس ضابطه‌ی تابع به صورت $f(x) = 2x^2 - 5x^2 - x + 6$ می‌باشد. می‌دانیم در تجزیه‌ی این تابع عامل $(x+1)$ وجود دارد، پس با تقسیم ضابطه‌ی تابع بر $x+1$ سایر عامل‌های تابع به دست می‌آید:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 5x^2 - x + 6 & x+1 \\ \hline - (2x^2 + 2x^2) & 2x^2 - 7x + 6 \\ \hline -3x^2 - x + 6 & \\ - (-3x^2 - 3x) & \\ \hline 2x + 6 & \\ - (2x + 2) & \\ \hline 4 & \end{array}$$

پس طول‌های دو نقطه‌ی تلاقی دیگر، در واقع ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 - 7x + 6 = 0$ هستند که مجموع آن‌ها برابر است با:

$$S = -\frac{b}{a} = -\frac{(-7)}{2} = \frac{7}{2}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در توابع اکیداً صعودی داریم: ۱۵۷

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

$$2 > 1 \Rightarrow f(2) > f(1) \Rightarrow m - 4 > m^2 - 4m \Rightarrow m^2 - 5m + 4 < 0$$

$$\Rightarrow (m-1)(m-4) < 0 \Rightarrow m \in (1, 4)$$

چون m عددی طبیعی است، مقادیر طبیعی $m = 2, 3$ در بازه‌ی موردنظر قرار دارد:

$$\xrightarrow{m \in \mathbb{N}} \begin{cases} m=2: f = \{(1, -4), (2, -2), (2, 6), (3, 8)\} \\ \text{در این صورت به دلیل وجود دو زوج مرتب } (2, -2) \text{ و } (2, 6) \text{ دی‌گر } f \text{ تابع نیست (غیرقابل قبول)} \\ m=3: f = \{(1, -3), (2, -1), (3, 6), (3, 8)\} \\ \text{در این صورت به دلیل وجود دو زوج مرتب } (3, 6) \text{ و } (3, 8) \text{ دی‌گر } f \text{ تابع نیست (غیرقابل قبول)} \end{cases}$$

در نتیجه هیچ مقدار طبیعی برای m وجود ندارد.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اگر تابع $y = f(x)$ اکیداً نزولی باشد، تابع $y = f(2-x)$ اکیداً صعودی است. همچنین اگر $x = 3$ صفر تابع f باشد، $x = -1$ صفر تابع $y = f(2-x)$ است. زیرا $3 - (-1) = 2$ است، پس برای تعیین علامت عبارت $(x-2)^2 f(2-x)$ داریم:

	-1	3
$(x-2)^2$	+	+
$f(2-x)$	-	+
عبارت	-	+

پس دامنه‌ی تابع g بازه‌ی $(-1, +\infty)$ است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = (x+1)^2 \xrightarrow[\text{بیا ضریب انبساط می دهیم}]{\text{در راستای محور } x \text{ ها}} y = \left(\frac{1}{3}x + 1\right)^2 \xrightarrow[\text{قرینه می کنیم}]{\text{نسبت به محور } y \text{ ها}}$$

$$y = \left(-\frac{1}{3}x + 1\right)^2 \Rightarrow y = \left(-\frac{1}{3}x + 1\right)^2 - 1$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

روش اول: اگر باقی‌مانده را به صورت $R(x) = ax^2 + bx + c$ در نظر بگیریم، آن‌گاه:

$$x^5 = (x^2 - x)q(x) + ax^2 + bx + c = x(x-1)(x+1)q(x) + ax^2 + bx + c$$

رابطه‌ی بالا یک اتحاد است و به‌ازای هر x برقرار است. اعدادی که مقسوم‌علیه را صفر می‌کنند را انتخاب می‌کنیم:

$$x = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$x = 1 \Rightarrow 1 = a + b + c \xrightarrow{c=0} a + b = 1$$

$$x = -1 \Rightarrow 1 = a - b + c \xrightarrow{c=0} a - b = 1$$

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ a - b = 1 \end{cases} \Rightarrow a = 1, b = 0 \Rightarrow R(x) = x^2$$

روش دوم:

مقسوم‌علیه را برابر صفر قرار می‌دهیم و به رابطه‌ی $x^2 = x$ می‌رسیم. اگر در مقسوم یعنی x^5 به جای x^2 عبارت x را قرار دهیم به باقی‌مانده خواهیم رسید.

$$x^5 = \underbrace{(x^2)}_x^{16} x^2 = x^{18} = \underbrace{(x^2)}_x^6 = x^6 = \underbrace{(x^2)}_x^2 = x^2$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. چون تابع $\log_2 x$ صعودی اکید است پس برای آن‌که تابع $f(x)$ صعودی اکید باشد بایستی:

$$16 - m^2 > 0 \Rightarrow m^2 < 16 \Rightarrow -4 < m < 4$$

در این فاصله هفت مقدار صحیح m یعنی $\{-3, -2, \dots, 3\}$ وجود دارد.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$p(x) = x^2 + mx^2 + nx + k = (x-a)(x^2 - 2x + 1) + 1 \Rightarrow p(1) = (1-a)(-1) + 1 = 2 \Rightarrow a = 2$$

$$p(-1) = (-1-2)(1+2+1) + 1 = -14$$

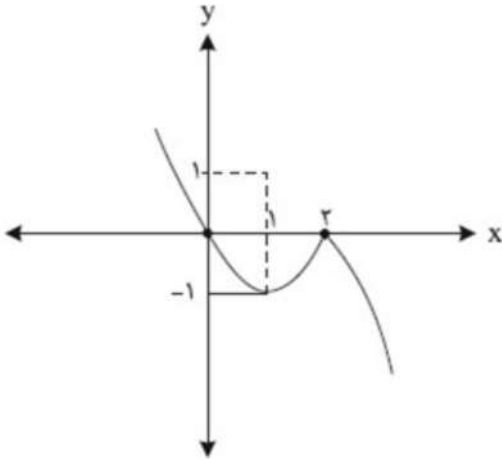
باقیمانده تقسیم بر $x+1$ برابر $p(-1)$ است.

$$f(x) = \frac{1}{3}(x^3 - 3x^2 + 3x) = \frac{1}{3}(x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 1) = \frac{1}{3}((x-1)^3 + 1) = \frac{1}{3}(x-1)^3 + \frac{1}{3}$$

حال برای این که به نمودار تابع $y = \frac{1}{3}x^3$ برسیم باید یک واحد به چپ و $\frac{1}{3}$ واحد به پایین انتقال دهیم:

$$y = f(x) \xrightarrow[\text{یک واحد به چپ}]{x \rightarrow x+1} y = \frac{1}{3}(x+1-1)^3 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3} \xrightarrow[\text{یک واحد به پایین}]{y \rightarrow y-\frac{1}{3}} g(x) = \frac{1}{3}x^3$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:

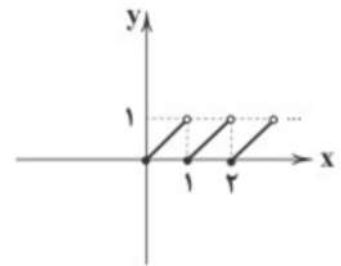


$$f(x) = -x|x-2| = \begin{cases} -x(x-2) & ; x \geq 2 \\ x(x-2) & ; x < 2 \end{cases}$$

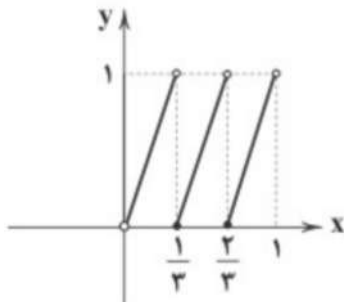
$$= \begin{cases} -x^2 + 2x & ; x \geq 2 \\ x^2 - 2x & ; x < 2 \end{cases}$$

منظور از رابطه‌ی $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ یعنی باید به دنبال بازه‌ای باشیم که تابع f در آن اکیداً صعودی باشد که همان‌طور که از نمودار f مشخص است تابع در بازه‌ی $[1, 2]$ یا هر زیرمجموعه‌ای از آن صعودی اکید است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. نمودار تابع $f(x) = x - [x]$ به صورت زیر است:



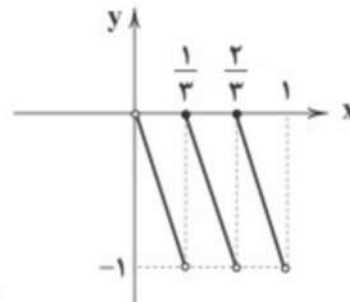
حال اگر نمودار $y = ax - [ax]$ در بازه‌ی $(0, 1)$ سه پاره‌خط داشته باشد و همچنین زیر محور x ها باشد باید $a = 3$ باشد. فرایند رسم را ببینید:



$$y = 3x - [3x]$$

$$0 < x < 1$$

$\Rightarrow$



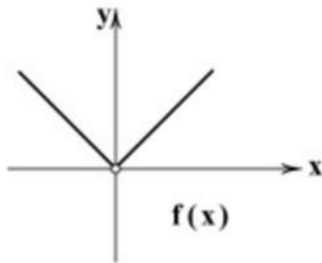
$$y = -3x + [3x]$$

$$0 < x < 1$$

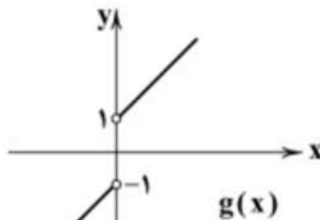
پس $a + a^2$ برابر ۱۲ می‌شود.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بررسی گزینه‌ها:
ضابطه‌ها را رسم می‌کنیم.

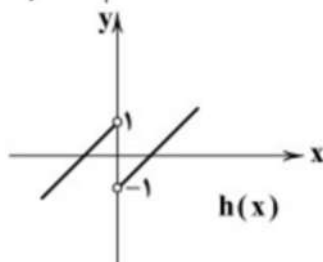
$$۱) f(x) = \frac{x^2}{|x|} = \begin{cases} x & x > 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$



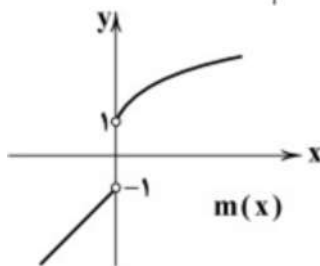
$$۲) g(x) = \begin{cases} x + 1 & x > 0 \\ x - 1 & x < 0 \end{cases}$$



$$۳) h(x) = \begin{cases} x - 1 & x > 0 \\ x + 1 & x < 0 \end{cases}$$

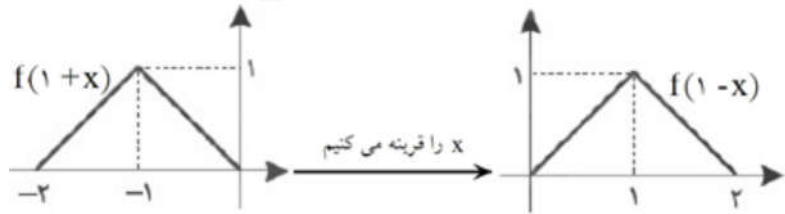
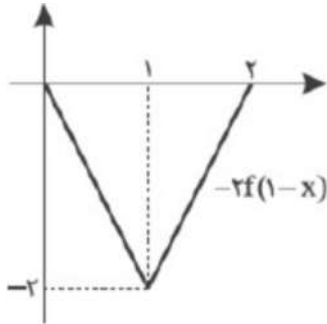


$$۴) m(x) = \begin{cases} \sqrt{x} + 1 & x > 0 \\ x - 1 & x < 0 \end{cases}$$



توابع m و g صعودی اکید هستند، تابع f در بازه $(0, +\infty)$ صعودی اکید و در بازه $(-\infty, 0)$ نزولی اکید است. اما تابع h در بازه‌های $(-\infty, 0)$ و $(0, +\infty)$ صعودی اکید است ولی در فاصله‌ی $R - \{0\}$ غیریکنوا است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

نمودار $f(x-1)$ را داریم. نمودار $f(1-x)$ را رسم می‌کنیم.نمودار $-2f(1-x)$ در فاصله‌ی $[0, 1]$ اکیداً نزولی است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = x^2 - 2x \xrightarrow[\text{انتقال می‌دهیم}]{\text{واحد به چپ ۲}} y = (x+2)^2 - 2(x+2)$$

$$y = x^2 + 6x + 4 - 2x - 4 = x^2 + 4x + 3$$

سپس نسبت به محور y ها بازتاب می‌کنیم.

$$y = x^2 - 4x + 3$$

رأس سهمی در ابتدا $A \left| \begin{smallmatrix} 1 \\ - \end{smallmatrix} \right|$ و رأس سهمی نهایی $A \left| \begin{smallmatrix} 2 \\ - \end{smallmatrix} \right|$ است، این دو نقطه نسبت به خط $x = \frac{3}{2}$ قرینه‌ی یکدیگر هستند.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

ابتدا نشان می‌دهیم دوره‌ی تناوب تابع $T = 8$ است.

$$f(x+4) = -\frac{1}{f(x)} \xrightarrow[\text{x را به } x+4 \text{ تبدیل می‌کنیم}]{\text{x را به}} f(x+8) = -\frac{1}{f(x+4)} = f(x)$$

$$f(29) = f(24+5) = f(5) = f(4+1) = -\frac{1}{f(1)}$$

$$0 \leq x \leq 2 \Rightarrow f(x) = -\frac{x}{4} + 2$$

$$f(1) = \frac{3}{4} \Rightarrow f(29) = -\frac{2}{3}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = (8x^9 - 12x^6 + 7x^3 - 1) + mx^7(x^2+1)^n + mn$$

پرانتر اول درجه‌ی ۹ است، پس باید پرانتر دوم هم از درجه‌ی نهم باشد و ضرایب آن‌ها قرینه شود تا با هم ساده شوند

پس:

$$n = 3, m = -8 \Rightarrow f(x) = (2x^3 - 1)^3 - 8x^7(x^2+1)^3 - 24$$

$$\Rightarrow f(1) = 1 - 8(2)^3 - 24 = 1 - 64 - 24 = -87$$

نکته: تابع $f(x) = |ax + b| + cx + d$ با شرط $|a| < |c|$ اکیداً یکنواست. اگر $c < 0$ باشد اکیداً نزولی و اگر $c > 0$ باشد اکیداً صعودی است.

$$|a + 1| < \frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{1}{4} < a + 1 < \frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{5}{4} < a < -\frac{3}{4}$$

عدد صحیح موردنظر در این بازه $a = -1$ است، پس:

$$f(x) = 1 - \frac{x}{4} \Rightarrow f(3) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $x^2 - 4$ برابر با $3x - 1$ است، پس:

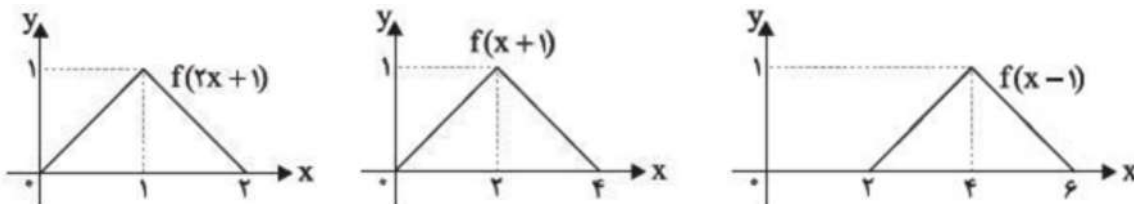
$$f(x) = (x^2 - 4)Q(x) + 3x - 1$$

$$f(2) = 5, f(-2) = -7 \quad \text{مقدار } f(2) \text{ و } f(-2) \text{ را از رابطه بالا، حساب می‌کنیم:}$$

$$\text{باقی‌مانده‌ی } g(x) = 2f(x+1) + 3f(x-3) \text{ بر } x-1 \text{ برابر } g(1) \text{ است:}$$

$$g(1) = 2f(2) + 3f(-2) = 2(5) + 3(-7) = -11$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



چون $f(x-1)$ همواره مثبت است پس نمودار $|f(x-1)|$ منطبق بر $f(x-1)$ است. مطابق شکل این نمودار در فاصله‌های $[2, 4]$ و $[4, 6]$ یک‌به‌یک و وارون‌پذیر است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$3 \leq x \leq 5 \Rightarrow 2 \leq x-1 \leq 4 \Rightarrow 2 \leq 1 - \frac{x}{4} \leq 4 \Rightarrow -6 \leq x \leq -2 \quad \text{(۱) دامنه تابع جدید}$$

$$-1 \leq 2f-3 \leq 3 \Rightarrow 1 \leq f \leq 3 \xrightarrow{\times -2} -9 \leq -2f \leq -6 \Rightarrow -12 \leq -3f-3 \leq -6 \quad \text{(۲) برد تابع جدید}$$

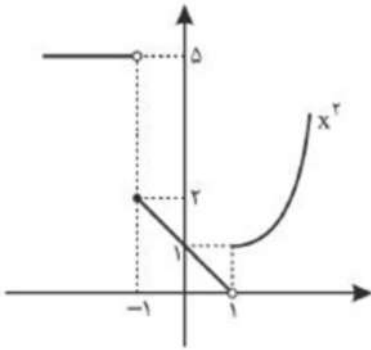
بنابراین اجتماع ۱ و ۲ به صورت $[-12, -2]$ و دارای ۱۱ عدد صحیح است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. باقی‌مانده تقسیم $p(x)$ بر $x+2$ برابر $p(-2)$ است:

$$\Rightarrow p(-2) = 2(-2)^2 - k(-2) + 6 = 2k - 10 = 2 \Rightarrow k = 6$$

$$p(x) = 2x^2 - 6x + 6 = (x+2)q(x) + 2 \quad \text{حال الگوی تقسیم را می‌نویسیم:}$$

$$6 = 2q(0) + 2 \Rightarrow q(0) = 2 \quad \text{با جای‌گذاری } x=0 \text{ در رابطه بالا داریم:}$$

تابع $f(x)$ را رسم می‌کنیم:

از نمودار تابع معلوم است که برد f به شکل $(0, +\infty)$ است. اگر f را ۳ واحد به راست و ۲ واحد به بالا بیاوریم، برد تابع $(2, +\infty)$ خواهد بود.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$g(x) = \frac{2(x-k) + 6}{x-k+3} = \frac{2x+6-2k}{x+3-k}$$

می‌دانیم در تابع هموگرافیک $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ شرط آن که $fof(x) = x$ باشد آن است که $a+d=0$ ، پس:

$$2+3-k=0 \Rightarrow k=5$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$x_S = \frac{1+a}{2a}$$

$$\frac{1+a}{2a} \geq 2 \Rightarrow \frac{1-a}{2a} \geq 0 \Rightarrow 0 \leq a \leq \frac{1}{2}$$

دقت کنید که به ازای $a=0$ هم تابع f ، یکنوا است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

با توجه به نمودار، $a=1$ است.

$$f(x) = (x-1)^2$$

$$m = f(0) = -1$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

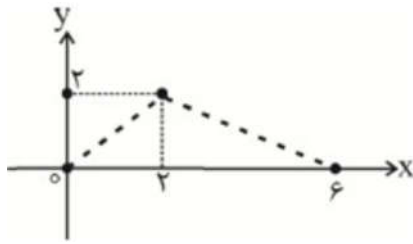
$$\xrightarrow{x \leq -1} y = -2x - 2 + \frac{x}{2} - 2 \Rightarrow f(x) = -\frac{3}{2}x - 4 \xrightarrow{y \geq -\frac{5}{2}} f^{-1}(x) = -\frac{2}{3}x - \frac{8}{3}, x \geq -\frac{5}{2}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به تعریف $|x|$ داریم.

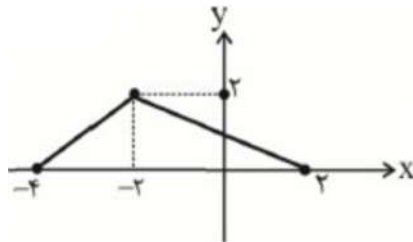
$$y = \begin{cases} 2x & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

تابع در بازه $(-\infty, 0]$ ثابت است پس می‌تواند نزولی باشد.

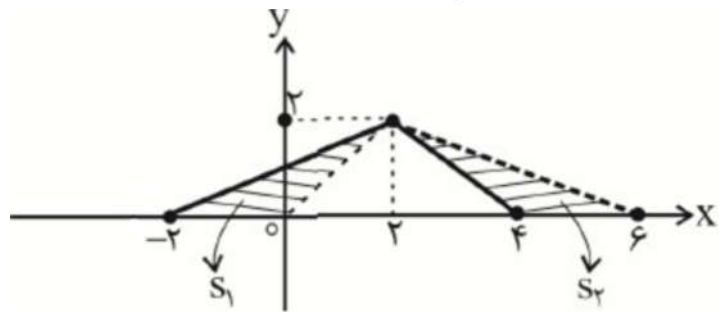
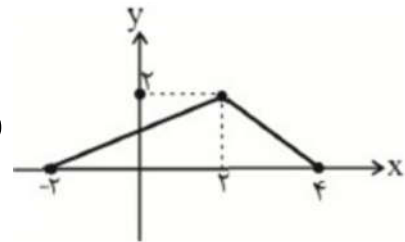
$y = f(x - 2)$: نمودار



$y = f(2 + x)$:

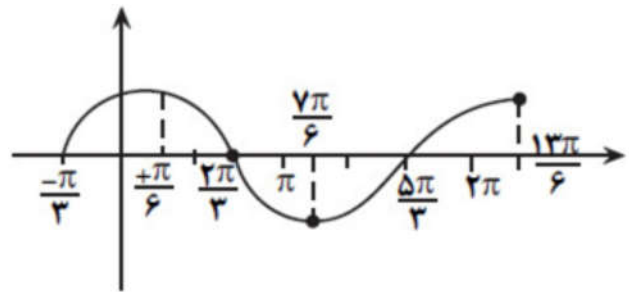


$x \rightarrow (-x) \rightarrow y = f(2 - x)$



$$\text{مساحت بین دو نمودار} = S_1 + S_2 = \frac{2 \times 2}{2} + \frac{2 \times 2}{2} = 4$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. برای رسم نمودار تابع $f(x)$ کافیست $\sin x$ را به اندازه $\frac{\pi}{6}$ به سمت منفی در روی محور x ها انتقال بدهیم. با توجه به نمودار، منحنی در بازه $(\frac{7\pi}{6}, \frac{13\pi}{6})$ اکیداً صعودی است. پس در $(\frac{7\pi}{6}, 2\pi)$ هم اکیداً یکنوا و طبیعتاً یکنواست.



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۸۴

$$y = f(x) \xrightarrow{\text{یک واحد به چپ افقی}} y = f(x+1) \xrightarrow[\text{با } y]{\text{قرینه نسبت به محور } y} y = f(-x+1)$$

$$\xrightarrow{\text{یک واحد به پایین (تایم)}} y = f(-x+1) - 1$$

$$y = f(-x+1) - 1 = (-x+1)^2 - 4(-x+1) + 3 - 1$$

$$\boxed{y = x^2 + 2x - 1} \quad \text{ضابطه تابع نهایی حاصل از انتقال ها}$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2(1)} = -1, y = -2$$

$$\text{مجموع طول و عرض رأس سهمی نهایی} = (-1) + (-2) = -3$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۸۵

$$-7 \leq 1 - 2x < 3 \xrightarrow{-1} -8 \leq -2x < 2 \xrightarrow{\div (-2)} -1 < x \leq 4 \Rightarrow a = -1, b = 4$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = (-1)^2 + 4^2 = 17$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. تابع f اکیداً صعودی است. ۱۸۶

$$f(f(x)) < f(x^5) \Rightarrow f(x) < x^5 \Rightarrow (x + \log x)^5 < x^5 \Rightarrow x + \log x < x$$

$$\Rightarrow \log x < 0 \Rightarrow x \in (0, 1)$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۸۷

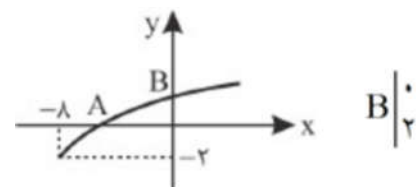
ابتدا f را رسم می‌کنیم.

$$f = 0 \Rightarrow \sqrt{2x+16} = 2 \Rightarrow 2x+16 = 4 \Rightarrow x = -6$$

$$A \Big|_{-6}^{-6}$$

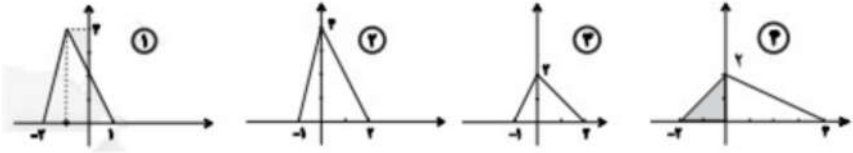
برای آنکه نمودار تابع $y = f(x+a) + a$ از ناحیه‌ی دوم عبور نکند، اگر $a > 0$ محال است از ناحیه‌ی دوم عبور نکند یعنی همیشه از ناحیه دوم می‌گذرد.

اما اگر $a < 0$ آنگاه با فرض $a \leq -2$ آنگاه نمودار از ناحیه‌ی دوم عبور نمی‌کند.



به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
 y = 2f(1-x) &\xrightarrow[\text{قرینه نسبت به } y]{x \rightarrow -x} \textcircled{1} y = 2f(1+x) \\
 &\xrightarrow[\text{واحد به راست}]{x \rightarrow x-1} \textcircled{2} y = 2f(x) \\
 &\xrightarrow[\text{انبساط افقی}]{\frac{1}{2} \text{ با ضرب}} \textcircled{3} y = f(x) \\
 &\xrightarrow[\text{انبساط افقی}]{\frac{1}{2} \text{ با ضرب}} \textcircled{4} y = f\left(\frac{1}{2}x\right)
 \end{aligned}$$



$$S = \frac{2 \times 2}{2} = 2$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانیم تابع موردنظر، از پاره‌خط‌هایی تشکیل شده است که شیب آن‌ها مثبت است. بنابراین، با توجه به اینکه $[x]$ در عدد صحیح z ناپیوسته است، برای اکیداً صعودی بودن تابع $y = 2x - k[x]$ ، کافی است حد راست آن در $x = z$ بزرگ‌تر یا مساوی با حد چپ آن در $x = z$ باشد. پس داریم:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow z^+} (2x - k[x]) = 2z - kz \\ \lim_{x \rightarrow z^-} (2x - k[x]) = 2z - k(z-1) = 2z - kz + k \end{cases}$$

$\Rightarrow$ شرط صعودی بودن: $2z - kz \geq 2z - kz + k \Rightarrow k \leq 0$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به اینکه $f(x) > 0$ و اینکه $f(x)$ اکیداً صعودی است، می‌توان نتیجه گرفت $\frac{1}{f(x)}$

اکیداً نزولی است و $y = f(x) - \frac{1}{f(x)}$ تابعی اکیداً صعودی است. از طرفی:

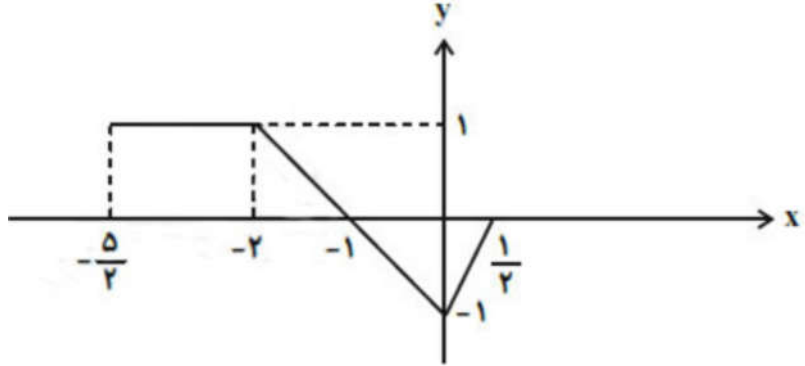
$$\begin{cases} 0 < f(x) < 1 \Rightarrow \frac{1}{f(x)} > 1 \Rightarrow f(x) - \frac{1}{f(x)} < 0 \\ 1 < f(x) < 5 \Rightarrow \frac{1}{f(x)} > \frac{1}{5} \Rightarrow f(x) - \frac{1}{f(x)} > 0 \end{cases}$$

روی دامنه $(0, 1)$ تابع $y = f(x) - \frac{1}{f(x)}$ اکیداً صعودی و منفی است و توان دو آن تابعی اکیداً نزولی خواهد بود.

روی دامنه $(1, 5)$ تابع $y = f(x) - \frac{1}{f(x)}$ اکیداً صعودی و مثبت است و $g(x) = \left(f(x) - \frac{1}{f(x)}\right)^2$ تابعی اکیداً صعودی خواهد بود.

۱۹۱

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. برای رسم نمودار $y = -f(1+x)$ از روی نمودار $y = f\left(1 - \frac{x}{2}\right)$ کافی است عرض نقاط را در ۱- ضرب و طول نقاط را بر (-2) تقسیم کنیم. در نتیجه نمودار تابع $y = -f(x+1)$ به صورت زیر است:



سطح بین نمودار حاصل و محور x ها از یک ذوزنقه و یک مثلث تشکیل شده است که مساحت آن‌ها به ترتیب برابر است

$$S_{\text{مثلث}} = \frac{\frac{1}{2} \times 1}{2} = \frac{1}{4}, S_{\text{ذوزنقه}} = \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right)}{2} \times (1) = 1$$

با: در نتیجه مساحت سطح محصور برابر $\frac{5}{4}$ است.

۱۹۲

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر نمودار تابع $y = \sqrt{-x}$ را یک واحد به چپ منتقل کنیم نمودار تابع

$y = \sqrt{-(x+1)} = \sqrt{-x-1}$ به دست می‌آید. اگر نمودار به دست آمده را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم نمودار تابع $y = \sqrt{x-1}$ می‌شود. و اگر مجدداً این نمودار را یک واحد به چپ منتقل کنیم نمودار تابع $y = \sqrt{(x+1)} - 1 = \sqrt{x}$ به دست می‌آید.

۱۹۳

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$[2, -3] \in y = 2f(2x-2) + 1 \Rightarrow -3 = 2f(1) + 1 \Rightarrow f(1) = -2 \Rightarrow (1, -2) \in f(x)$$

$$y = 3 - f\left(4 - \frac{x}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} 4 - \frac{x}{2} = 1 \Rightarrow \frac{x}{2} = 3 \Rightarrow x = 6 \\ x = 6 \Rightarrow y = 3 - f(1) = 3 - (-2) \Rightarrow y = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{matrix} 6 \\ 5 \end{matrix} \right] \in y = 3 - f\left(4 - \frac{x}{2}\right)$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. تابع $1 - f^{-1}(x - 2)$ بر $x - 9$ بخش پذیر است، پس داریم:

$$x - 9 = 0 \Rightarrow x = 9 \Rightarrow f^{-1}(9 - 2) - 1 = 0 \Rightarrow f^{-1}(7) = 1 \Rightarrow f(1) = 7$$

از طرفی تابع $f(x)$ از درجه سوم است و خارج قسمت آن بر $x^2 + x$ یک عدد است. اگر این عدد را m فرض کنیم،

$$f(x) = m(x^2 + x) + 3$$

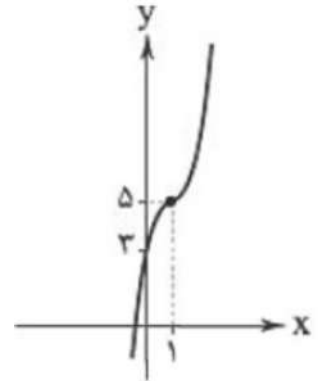
داریم:

$$f(1) = 7 \Rightarrow m(2) + 3 = 7 \Rightarrow m = 2 \Rightarrow f(x) = 2x^2 + 2x + 3$$

برای رسم تابع $y = f(x) + 4x - 6x^2$ داریم:

$$y = 2x^2 + 2x + 3 + 4x - 6x^2 = 2x^2 - 6x^2 + 6x + 3 = 2x^2 - 6x^2 + 6x - 2 + 5 = 2(x - 1)^2 + 5$$

نمودار این تابع به صورت زیر خواهد بود و این تابع از ناحیه ۴ محورهای مختصات نمی گذرد.



گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} f((a+1)x-b) &\xrightarrow{x \rightarrow -x} f(-(a+1)x-b) \xrightarrow{x \rightarrow x-3} f(-(a+1)(x-3)-b) \\ &\xrightarrow{x \rightarrow 2x} f(-(a+1)(2x-3)-b) = f(-2(a+1)x+3(a+1)-b) = f(-4x+8) \\ &\Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases} \Rightarrow a+b=-1 \end{aligned}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. برای تعیین دامنه تابع باید نامعادله‌ی مقابل را حل کنیم: $f(x) \geq f(2x)$

چون f اکیداً صعودی است، داریم:

$$f(x) \geq 2x \Rightarrow x^2 + x \geq 2x \Rightarrow x^2 - x \geq 0$$

$$D = [-1, 0] \cup [1, +\infty) \Rightarrow D \cap \mathbb{Z}^- = \{-1\}$$

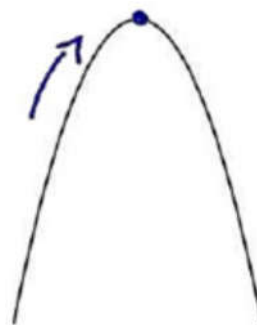
گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} &\xrightarrow{\text{انبساط عمودی با ضریب ۲}} 2\sqrt{x} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به } y} 2\sqrt{-x} \\ &\xrightarrow{\text{یک واحد انتقال به راست}} 2\sqrt{-(x-1)} = 2\sqrt{-x+1} = \sqrt{-4x+4} \end{aligned}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{a}{1} = 2/5 \Rightarrow a = 25$$

$$y_s = y(2/5) = -5 \times 6/25 + 25 \times 2/5 - 8 = 23/25$$



$$K = 1 \Rightarrow 2a^2 - a - 5 = 1 \Rightarrow 2a^2 - a - 6 = 0$$

$$a = -\frac{6}{2} = -3 \text{ حاصلضرب مقادیر } a$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. تابع $y = x^2 - 4x - 2$ را ۳ واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم. پس باید x را به $x + 3$ تبدیل کنیم.

$$y = x^2 - 4x - 2 \xrightarrow{x \rightarrow x+3} y = (x+3)^2 - 4(x+3) - 2$$

$$y = x^2 + 6x + 9 - 4x - 12 - 2 \Rightarrow y = x^2 + 2x - 5$$

$$y = x^2 + 2x + 1 - 1 - 5 \Rightarrow y = (x+1)^2 - 6$$

سپس نمودار را ۴ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم:

$$f(x) = (x+1)^2 - 6 + 4 \Rightarrow f(x) = (x+1)^2 - 2 \Rightarrow a = 1, b = -2$$

$$f(a) = f(1) = (1+1)^2 - 2 = 4 - 2 = 2$$

$$f(b) = f(-2) = (-2+1)^2 - 2 = 1 - 2 = -1$$

$$f(a) + f(b) = 2 + (-1) = 1$$