

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

(۱) $f \leftarrow f(1) = f(-1) = -1$ غیر یک‌به‌یک است.

(۲) $f \leftarrow f(0) = f(0/5) = 0$ غیر یک‌به‌یک است.

(۳) $f \leftarrow f(0) = f(3) = 0$ غیر یک‌به‌یک است.

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$g(x) = 2x - 1, (f \circ g)(x) = \frac{x}{x-3} \Rightarrow f(g(x)) = \frac{x}{x-3}$$

$$g(x) = 3 \Rightarrow 2x - 1 = 3 \Rightarrow x = 2$$

$$f(g(x)) = \frac{x}{x-3} \xrightarrow{g(x)=3 \Rightarrow x=2} f(3) = \frac{2}{2-3} = -2$$

$$(f \circ g)x = f(g(x)) = f(2x - 1) = 2x - 1 + 3 = 2x + 2$$

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$(g \circ f)x = g(f(x)) = g(x + 3) = 2(x + 3) - 1 = 2x + 12x + 17$$

$$(f \circ g)a = (g \circ f)a \Rightarrow 2a + 2 = 2a + 12a + 17 \Rightarrow 12a = -15 \Rightarrow a = \frac{-15}{12} = \frac{-5}{4}$$

$$f(x) = ax + b$$

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$f \circ f(x) = a(ax + b) + b = a^2x + ab + b = 9x - 8 \rightarrow \begin{cases} a^2 = 9 \\ ab + b = -8 \end{cases}$$

$$a = 3 \rightarrow b = -2 \rightarrow f(x) = 3x - 2 \rightarrow f(5) = 13$$

$$a = -3 \rightarrow b = 4 \rightarrow f(x) = -3x + 4 \rightarrow f(5) = -11$$

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \left\{ -2 \leq x \leq 2 \mid \sqrt{4 - x^2} \in \{-3, -2, -1, 0, 3\} \right\}$$

$$\begin{cases} \sqrt{4 - x^2} = 3 \Rightarrow 4 - x^2 = 9 \Rightarrow x^2 = -5 \\ \sqrt{4 - x^2} = 0 \Rightarrow x = \pm 2 \end{cases}$$

$$f \circ g = \{(-2, 2), (2, 2)\}$$

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. $f(x)$ یک تابع صعودی است و $g(x)$ یک تابع صعودی است پس $g \circ f$ یعنی $g(f(x))$ تابع

صعودی است. توجه: توابع $y = a^x$, $y = \log_a x$ اگر $a > 1$ باشد صعودی و اگر $0 < a < 1$ باشد نزولی می‌باشند.

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. از معادله $y = \frac{x-2}{2x-1}$ مقدار x برحسب y محاسبه شود.

$$2xy - y = x - 2 \rightarrow x(2y - 1) = y - 2 \rightarrow x = \frac{y-2}{2y-1}$$

ضابطه‌ی تابع عوض کنیم به عبارت دیگر ضابطه معکوس $y = \frac{x-2}{2x-1}$ است.

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. در تابع f داریم:

۸

$$f(5) = 6$$

$$g^{-1}(6) = a \Rightarrow g(a) = 6 \Rightarrow a + \sqrt{a} = 6 \Rightarrow \sqrt{a} = 6 - a \Rightarrow a = a^2 - 12a + 36$$

$$\Rightarrow a^2 - 13a + 36 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ a = 9 \end{cases}$$

غ ق ق ۹

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

۹

$$f(x) = g(g(x^5)) \xrightarrow{x=1} f(1) = g(g(1)) = g(2) = 2 \Rightarrow f(1) = 2 \Rightarrow f^{-1}(2) = 1$$

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. اگر وارون تابع f را با f^{-1} نشان دهیم، آن‌گاه $f^{-1}(4)$ مدنظر سؤال است. می‌دانیم که اگر $(x, y) = f(x)$ ، آن‌گاه $(y, x) = f^{-1}(y)$ ، پس گزینه‌ای را انتخاب می‌کنیم که مقدار تابع f به ازای آن برابر چهار شود، با امتحان کردن گزینه‌ها داریم:

$$f(-4) = 4 + \sqrt{4} = 6 \quad \text{گزینه‌ی (۲)}$$

$$f(-8) = 8 + \sqrt{16} = 12 \quad \text{گزینه‌ی (۱)}$$

$$f(-1) = 1 + \sqrt{1} = 2 \quad \text{گزینه‌ی (۴)}$$

$$f(-2) = 2 + \sqrt{4} = 4 \quad \text{گزینه‌ی (۳)}$$

راه حل بدون گزینه‌ها:

$$-x + \sqrt{-2x} = 4 \Rightarrow x + 4 = \sqrt{-2x} \xrightarrow{x \geq -4} x^2 + 8x + 16 = -2x \Rightarrow x^2 + 10x + 16 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -8 \end{cases}$$

غ ق ق ۸

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

۱۱

$$\begin{cases} y = \sqrt{x}, x \geq 0 \Rightarrow x = y^2, y \geq 0 \\ y = -\sqrt{-x}, x < 0 \Rightarrow x = -y^2, y < 0 \end{cases} \quad x = y|y| \Rightarrow f^{-1}(x) = x|x|$$

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل داریم:

۱۲

$$D_f = (-\infty, 1], D_g = [-1, +\infty)$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\} = \{x \geq -1 | g(x) \leq 1\}$$

با دقت در شکل متوجه می‌شویم که در تابع g ، اگر $x \geq 4$ یا $-1 \leq x \leq 2$ باشند، $g(x) \leq 1$ است. پس:

$$D_{f \circ g} = \{x \geq -1 | -1 \leq x \leq 2 \text{ یا } x \geq 4\} = [-1, 2] \cup [4, +\infty)$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۱۳

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} \sqrt{|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x} & x < 0 \\ \sqrt{x} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$R_f = R \Rightarrow D_{f^{-1}} = R$$

$$\begin{cases} y = -\sqrt{-x} \xrightarrow[\text{می‌رسانیم}]{\text{به توان ۲}} y^2 = -x \Rightarrow x = -y^2, y < 0 \\ y = \sqrt{x} \xrightarrow[\text{می‌رسانیم}]{\text{به توان ۲}} y^2 = x \Rightarrow x = y^2, y \geq 0 \end{cases}$$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases} = x|x|$$

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. می‌دانیم $f(x) = 2x^2 + 4$ و $f(g(x)) = 4x^2 + 6x$ است. برای تعیین مقدار $g(-2)$ ابتدا خودمان با داشتن ضابطه‌ی f ضابطه‌ی $f(g(x))$ را ساخته و برابر $4x^2 + 6x$ قرار می‌دهیم و آن‌گاه با جایگذاری $x = -2$ مقدار $g(-2)$ را به دست می‌آوریم. داریم:

$$\begin{cases} f(x) = 2x^2 + 4 \Rightarrow f(g(x)) = 2g^2(x) + 4 \\ f(g(x)) = 4x^2 + 6x \end{cases} \Rightarrow 2g^2(x) + 4 = 4x^2 + 6x \Rightarrow g^2(x) = 2x^2 + 3x - 2$$

$$\xrightarrow{x=-2} g^2(-2) = 2(-2)^2 + 3(-2) - 2 = 0 \Rightarrow g(-2) = 0$$

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$x^2 + 2x - 2 = x \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$ روی نیمساز ناحیه اول متقاطع اند $\Rightarrow f$ اکیدا صعودی است

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$\log(x) = \frac{6x+3}{-3x-1}, \text{gof}(x) = \frac{6x-3}{1-x} + 2 = \frac{6x-1}{1-x} \Rightarrow \frac{6x+3}{-3x-1} = \frac{6x-1}{x-1}$$

قطع نمی‌کند $\Rightarrow$ نشدنی $\Rightarrow 6x^2 - 3x - 3 = 12x^2 + x - 1 \Rightarrow 6x^2 + 4x + 2 = 0 \Rightarrow 3x^2 + 2x + 1 = 0$

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

اکنون به جای $2x - 1$ را $\frac{2-x}{3}$ قرار می‌دهیم:

$$-1 \leq \frac{2-x}{3} < 1 \Rightarrow -3 \leq 2-x < 3 \Rightarrow -5 \leq -x < 1 \Rightarrow -1 < x \leq 5$$

پس دامنه‌ی $y = f\left(\frac{2-x}{3}\right)$ شامل ۶ عدد صحیح $(0, 1, 2, 3, 4, 5)$ است.

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$y = 1 + \sqrt{1-x^2} \Rightarrow y-1 = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow (y-1)^2 = 1-x^2 \Rightarrow x^2 = 1-(y-1)^2 =$$

$$2y-y^2 \Rightarrow |x| = \sqrt{2y-y^2} \xrightarrow{0 \leq x \leq 1} x = \sqrt{2y-y^2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{2x-x^2}$$

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. طبق تعریف تابع و وارون آن داریم:

$$f(a) = b \Rightarrow f^{-1}(b) = a, f^{-1}(b) = a \Rightarrow f(a) = b$$

$$g^{-1}(10) = a \Rightarrow g(a) = 10 \Rightarrow a^2 + a = 10 \Rightarrow a = 2$$

$$(f \circ g^{-1})(10) = f(g^{-1}(10)) = f(a) = f(2) = 2(2) - 3 = 1$$

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$f = \{(1, 2), (-1, 3), (2, -1)\}, g = \{(1, -1), (2, 1), (0, 2)\}$$

با فرض $h = f + g^2$ و انتخاب x های g داریم:

$$x = 1 \Rightarrow (hog)(1) = h(g(1)) = h(-1) = (f + g^2)(-1) = f(-1) + g^2(-1)$$

(چون $g(-1)$ نداریم) وجود ندارد

$$x = 2 \Rightarrow (hog)(2) = h(g(2)) = h(1) = (f + g^2)(1) = f(1) + g^2(1) = 2 + (-1)^2 = 3$$

$$x = 0 \Rightarrow (hog)(0) = h(g(0)) = h(2) = (f + g^2)(2) = f(2) + g^2(2) = (-1) + (1)^2 = 0$$

بنابراین $(f + g^2)og = \{(2, 3), (0, 0)\}$

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. برای محاسبه‌ی ضابطه‌ی وارون یک تابع، ابتدا x را برحسب y به دست می‌آوریم. سپس جای x و y را عوض می‌کنیم.

$$y = \sqrt{x} - 1 \Rightarrow \sqrt{x} = y + 1 \Rightarrow x = (y + 1)^2 \xrightarrow{\text{جای } x, y \text{ را عوض می‌کنیم}} y = (x + 1)^2$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f^{-1} \circ g(1) = f^{-1}(g(1)) = f^{-1}(\underbrace{3 \times 1 - 1}_2) = f^{-1}(2) \xrightarrow{(1, 2) \in f} f^{-1}(2) = 1$$

نکته: وقتی $(a, b) \in f$ است، یعنی $f(a) = b$ یا معادل آن $f^{-1}(b) = a$

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا، x را برحسب y به دست می‌آوریم. سپس جای x و y را عوض می‌کنیم:

$$y = x^2 - 2x(x > 1) \Rightarrow y + 1 = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 \xrightarrow[\text{می‌گیریم}]{\text{جذر}} (x - 1) = \pm \sqrt{y + 1}$$

$$|x - 1| = \sqrt{y + 1} \xrightarrow{x > 1} x - 1 = \sqrt{y + 1} \Rightarrow x = 1 + \sqrt{1 + y}$$

$$\xrightarrow{\text{جای } x, y \text{ را عوض می‌کنیم}} y = 1 + \sqrt{1 + x}$$

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. باید نقطه‌ی را بیابیم که در آن $(\text{gof})(x) = 0$ است، داریم:

$$(\text{gof})(x) = 0 \Rightarrow g(f(x)) = 0$$

$$g(f(x)) = \begin{cases} (f(x))^2 - 1, & f(x) \geq 0 \Rightarrow (f(x))^2 - 1 = 0 \\ \Rightarrow f(x) = \pm 1 \xrightarrow{f(x) \geq 0} f(x) = 1 \\ \Rightarrow x - 1 = 1 \Rightarrow x = 2 \\ 2f(x) - 2, & f(x) < 0 \Rightarrow 2f(x) - 2 = 0 \\ \Rightarrow f(x) = 1 > 0 \text{ غلط..} \end{cases}$$

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$(\text{fog})(x) = 5x + x^2 - 6 \Rightarrow -x^2 + 5x - 6 \geq 0$$

یا $2 \leq x \leq 3$ یا دامنه تابع مرکب بازه $[2, 3]$ است.

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. در تابع g داریم $g(1) = 2$ و تابع f^{-1} به صورت $f^{-1} = \{(5, 2), (1, 3), (2, 7), (4, 1)\}$

داریم $f^{-1}(2) = 7$ در نتیجه $f^{-1}(g(1)) = f^{-1}(2) = 7$

۲۷

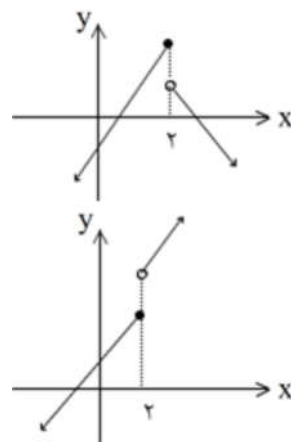
گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر $a = 0$ باشد، ضابطه‌ی پایینی غیریک‌به‌یک می‌شود، پس: $a \neq 0$. اگر $a < 0$ باشد شیب ضابطه‌ی بالایی مثبت و شیب ضابطه‌ی پایینی منفی می‌شود، بنابراین نمودار تابع به صورت زیر است که تابع یک‌به‌یک نیست، پس $a < 0$ نمی‌تواند باشد.

بنابراین باید $a > 0$ باشد. به ازای $a > 0$ نمودار تابع تقریباً به صورت زیر است:

برای این که نمودار مقابل یک‌به‌یک باشد، باید به ازای $x = 2$ نمودار

$y = ax + 1$ بالاتر از $y = x + a$ باشد.

$$x = 2 : 2a + 1 \geq 2 + a \Rightarrow a \geq 1$$



۲۸

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. واضح است که:

$$\text{fog} = f(g(x)) = \sqrt{x-1} - 2 \quad (x \geq 1)$$

۲۹

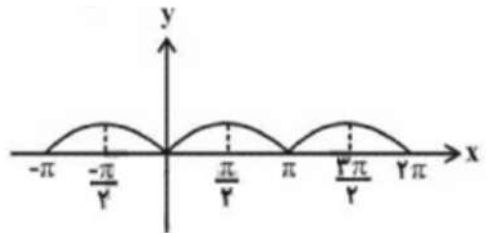
گزینه ۱ پاسخ صحیح است. می‌دانیم $(x, y) \in f \Leftrightarrow (y, x) \in f^{-1}$ بنابراین می‌توان نوشت:

$$f^{-1}(x) = x^2 + x = 2 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow (1, 2) \in f^{-1} \Rightarrow (2, 1) \in f$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. تعریف $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ نشان‌دهنده‌ی نزولی اکید بودن تابع f در بازه‌ی

۳۰

موردنظر است. نمودار تابع f به صورت زیر است:



با توجه به شکل و با توجه به گزینه‌ها، تابع در فاصله‌ی $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ اکیداً نزولی است.

۳۱

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. به دلیل وجود دو زوج مرتب $(4, 2)$ و $(m^2 - 3m, 2)$ در رابطه‌ی f ، شرط لازم برای آن که تابع باشد، آن است که:

$$m^2 - 3m = 4 \Rightarrow m^2 - 3m - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 4 \end{cases}$$

به ازای $m = -1$ ، رابطه به صورت $f = \{(4, 2), (4, 2), (-1, 1), (-1, -1)\}$ در می‌آید، که تابع نیست. (به ازای $x = -1$ دو مقدار برای y وجود دارد.)

به ازای $m = 4$ ، رابطه به صورت $f = \{(4, 2), (4, 2), (-1, 16), (4, -1)\}$ در می‌آید، که یک تابع نیست. (به ازای $x = 4$ دو مقدار برای y وجود دارد.)

۳۲

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر نمودار تابع بالای محور x بشود، الزاماً عرض تمام نقاط آن مثبت است.

$$(a-1)x^2 + 3x + a + 1 > 0 \Rightarrow (a-1 > 0, \Delta < 0)$$

پس جواب مشترک دو نامعادله را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} a > 1 \\ 9 - 4(a^2 - 1) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > 1 \\ a^2 > \frac{13}{4} \end{cases}$$

در نتیجه $a > \frac{\sqrt{13}}{2}$ می‌باشد.

۳۳

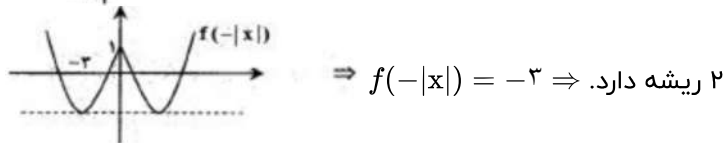
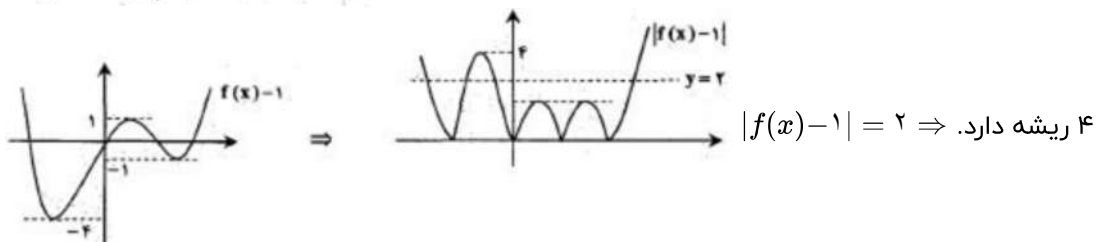
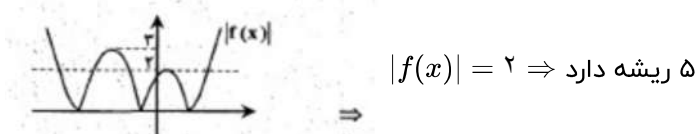
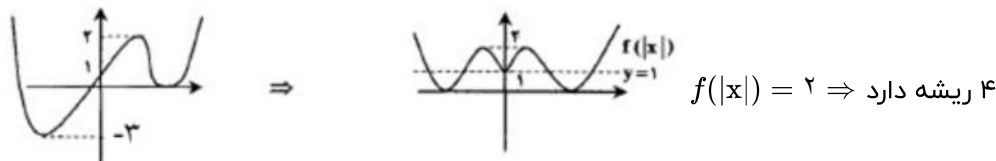
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در تابع خطی $f(x) = ax + b$ داریم:

$$\begin{cases} f(2) = 1 \\ f(7) = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + b = 1 \\ 7a + b = 11 \end{cases} \Rightarrow a = 2, b = -3$$

پس $f(x) = 2x - 3$ است. از طرفی می‌دانیم $f(x) = 15 \Leftrightarrow f^{-1}(15) = x \Rightarrow f(x) = 15$ پس $2x - 3 = 15$ در نتیجه $x = 9$

۳۴

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۳۵

$$y = f(x) = ax + b \Rightarrow x = \frac{y-b}{a} \Rightarrow x = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a}$$

$$g(y) = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$$

$$f(x) = f^{-1}(x) \Rightarrow ax + b = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow \left(a - \frac{1}{a}\right)x + \left(b + \frac{b}{a}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a - \frac{1}{a} = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{a} \Rightarrow a = \pm 1 & (1) \\ b + \frac{b}{a} = 0 \Rightarrow b\left(\frac{a+1}{a}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ \text{یا} \\ b = 0 \end{cases} & (2) \end{cases}$$

مشاهده می‌شود که اگر $a = -1$ باشد، شروط (۱) و (۲) همزمان برقرار می‌شوند.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۳۶

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = 3g(x) - 1 \quad \underline{\text{فرض}} \quad x + 2 \Rightarrow g(x) = \frac{x+2}{3} \xrightarrow{x=1} g(1) = \frac{4}{3}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۳۷

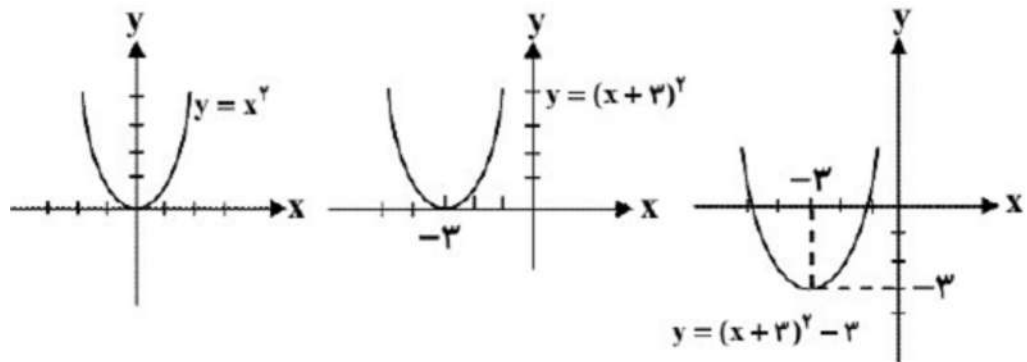
$$f(g(2)) = f(1 - 2\sqrt{2}) = 2(1 - 2\sqrt{2}) + |1 - 2\sqrt{2}| = 2 - 4\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 1 = 1 - 2\sqrt{2} = g(2)$$

دقت کنید که:

$$1 - 2\sqrt{2} < 0 \Rightarrow |1 - 2\sqrt{2}| = 2\sqrt{2} - 1$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۳۸

$$y = x^2 + 6x + 9 = x^2 + 6x + 9 - 9 + 9 = (x+3)^2 - 3$$



$$f(x) = (a^2 - 3a + 2)x + 3$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۳۹

برای اینکه تابع خطی فوق یک به یک نباشد، باید ضابطه آن به صورت $f(x) = k$ باشد، که k عددی ثابت است، به عبارت

دیگر، ضریب x در معادله‌ی آن باید صفر باشد، پس:

$$a^2 - 3a + 2 = 0 \Rightarrow a = 1, a = 2$$

۴۰

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اگر $(a, b) \in f$ باشد، آن گاه $(b, a) \in f^{-1}$ است، بنابراین:

$$\begin{aligned} (2, a) \in f^{-1} &\Rightarrow (a, 2) \in f \Rightarrow \sqrt{a+1} + \sqrt{a-3} = \sqrt{4} \\ &\Rightarrow a+1 + \sqrt{a-3} = 4 \Rightarrow (a-3) + \sqrt{a-3} = 0 \\ &\Rightarrow \sqrt{(a-3)^2} + \sqrt{a-3} = 0 \Rightarrow \sqrt{a-3}(\sqrt{a-3} + 1) = 0 \\ &\begin{cases} \sqrt{a-3} = 0 \Rightarrow a = 3 \\ \sqrt{a-3} = -1 \quad \text{غ ق ق} \end{cases} \Rightarrow a = 3 \end{aligned}$$

۴۱

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. هر دو تابع توانی $f(x) = 3^{\frac{1}{3}x}$ و $g(x) = \text{Log } x$ صعودی اند الزاماً gof صعودی است.

۴۲

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

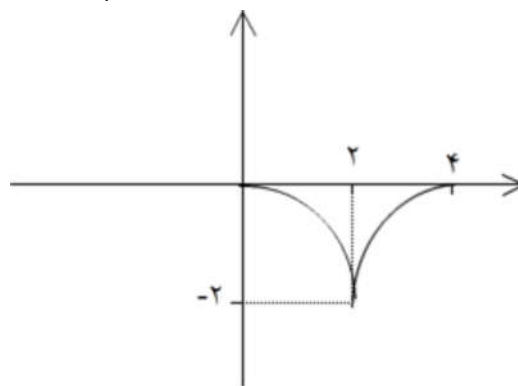
$$2x^2 + mx + 2 > x^2 + x - 2 \Rightarrow x^2 + (m-1)x + 4 > 0$$

کافی است که سه جمله درجه دوم حاصل فاقد ریشه باشد.

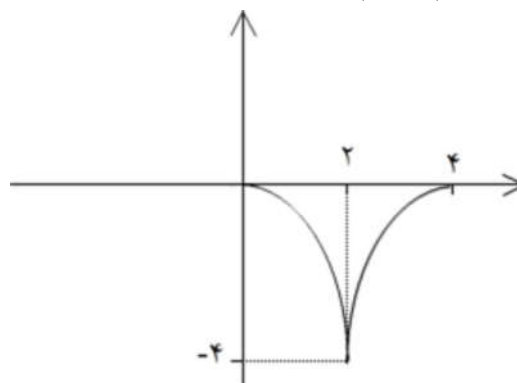
$$\Delta < 0 \Rightarrow (m-1)^2 - 16 < 0 \Rightarrow -4 < m-1 < 4$$

پس $-3 < m < 5$ است.

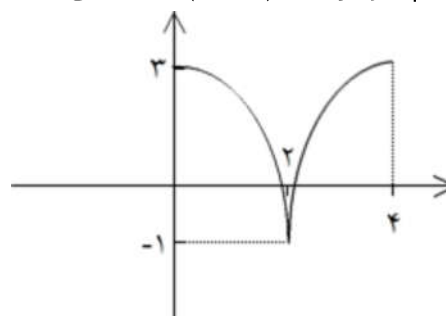
گزینه ۱ پاسخ صحیح است. برای رسم $f(x - a)$ کافی است نمودار را a واحد به سمت راست منتقل کنیم و برای رسم $kf(x)$ کافی است عرض نقاط را k برابر نماییم. در این صورت ابتدا $-f(x - 1)$ را رسم می‌کنیم:



حال نمودار $-2f(x - 1)$ را با توجه به مطالب گفته شده در بالا رسم می‌کنیم:



برای رسم نمودار $3 + -2f(x - 1)$ کافی است، تنها به عرض نقاط، 3 واحد بیافزاییم در نتیجه:



گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = -x^2 - 2x$$

$$\begin{aligned} f(x-2) &= -(x-2)^2 - 2(x-2) = -(x^2 - 4x + 4) - 2x + 4 = -x^2 + 4x - 4 - 2x + 4 \\ &= -x^2 + 2x \end{aligned}$$

$$f(x-2) - f(x) = (-x^2 + 2x) - (-x^2 - 2x) = -x^2 + 2x + x^2 + 2x = 4x$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. از تابع مفروض، مقدار x را برحسب y محاسبه می‌کنیم.

۴۵

$$y(2^x) + y = 2^x - 1$$

$$y + 1 = 2^x(1 - y) \Rightarrow 2^x = \frac{1+y}{1-y} \Rightarrow x = \log_2 \frac{1+y}{1-y}$$

پس معکوس تابع به صورت $y = \log_2 \frac{1+x}{1-x}$ می‌باشد.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. تابع خطی $f(x) = ax + b$ است.

۴۶

$$a(ax + b) + b = 9x + 10 \Rightarrow (a^2 = 9, ab + b = 10)$$

چون تابع خطی نزولی است: $a = -3$ ، در نتیجه: $b = -5$ و $f(x) = -3x - 5$ ، پس: $f(1) = -8$.

$$f(x) = ax + b$$

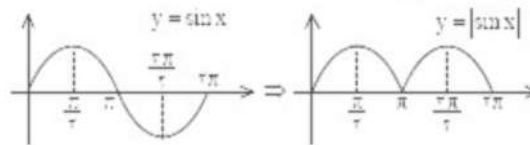
گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۴۷

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} f(2) &= 0 \\ f(-1) &= 4 \end{aligned} \right\} &\Rightarrow \begin{cases} 2a + b = 0 \\ -a + b = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a - b = 0 \\ -a + b = 4 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{4}{3}, b = \frac{8}{3} \\ \Rightarrow f(x) = -\frac{4}{3}x + \frac{8}{3} &\Rightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{8}{3} \Rightarrow x = -\frac{3}{4}\left(y - \frac{8}{3}\right) \\ \Rightarrow x = -\frac{3}{4}y + 2 &\Rightarrow f^{-1}(x) = -\frac{3}{4}x + 2 \end{aligned}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به نمودار تابع در بازه $\left(\frac{3\pi}{4}, 2\pi\right)$ اکیداً نزولی است.

۴۸



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. طبق فرض داریم:

۴۹

$$\begin{cases} f(0) = 1 \Rightarrow 0 + 0 + c = 1 \Rightarrow c = 1 (*) \\ f(1) = 0 \Rightarrow a + b + c = 0 \xrightarrow{(*)} a + b = -1 \\ f(2) = 3 \Rightarrow 4a + 2b + c = 3 \xrightarrow{(*)} 4a + 2b = 2 \Rightarrow 2a + b = 1 \end{cases}$$

اکنون با حل دستگاه $\begin{cases} a + b = -1 \\ 2a + b = 1 \end{cases}$ خواهیم داشت $a = 2$ و $b = -3$ پس:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4 + 9 + 1 = 14$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در رابطه $f(x) + xf(-x) = x^2 + x$ داریم

۵۰

$$\begin{cases} f(2) + 2f(-2) = 6 \\ f(-2) - 2f(2) = 2 \end{cases}$$

با حذف $f(-2)$ خواهیم داشت $5f(2) = 6 - 4$ پس $f(2) = -\frac{2}{5}$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا مقادیر $f(3)$ و $g(f(3))$ را به دست می‌آوریم:

۵۱

$$\begin{cases} f(x+1) = 3x - 2 \xrightarrow{x=3} f(3) = 6 - 2 = 4 \\ g(x-2) = 5x \xrightarrow{x=4} g(4) = 30 \Rightarrow g(f(3)) = g(4) = 30 \end{cases}$$

اکنون در طرفین تساوی $f(x+1) = 3x - 2$ به جای x ، قرار می‌دهیم $x-1$ ، بنابراین:

$$f(x+1) = 3x - 2 \Rightarrow f(x-1+1) = 3(x-1) - 2 \Rightarrow f(x) = 3x - 5$$

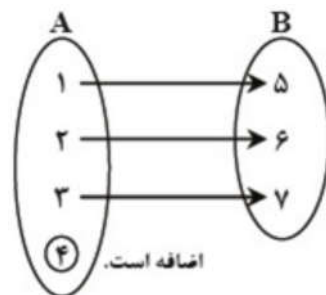
$$f(x) - 1 = g(f(3)) \Rightarrow 3x - 6 = 30 \Rightarrow 3x = 36 \Rightarrow x = 12$$

حال داریم:

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۵۲

توجه کنید که از یک مجموعه‌ی ۴ عضوی به یک مجموعه‌ی ۳ عضوی نمی‌توان تابع یک‌به‌یک تعریف کرد، زیرا یکی از اعضای دامنه، اضافه می‌ماند. (به شکل توجه کنید). سایر گزینه‌ها درست هستند.



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نکته: اگر f از نقطه‌ی (a, b) بگذرد، f^{-1} از نقطه‌ی (b, a) می‌گذرد.

۵۳

چون f از نقاط $(0, 0)$ و $(2, 7)$ می‌گذرد، پس f^{-1} از نقاط $(0, 0)$ و $(7, 2)$ می‌گذرد. بنابراین ضابطه‌ی $f^{-1}(x)$ معادله‌ی خط گذرا از این نقاط است.

$$y - 0 = \frac{2 - 0}{7 - 0}(x - 0) \Rightarrow y = \frac{2x}{7} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{2x}{7}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نکته: معادله‌ی محور تقارن تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ عبارت است از:

۵۴

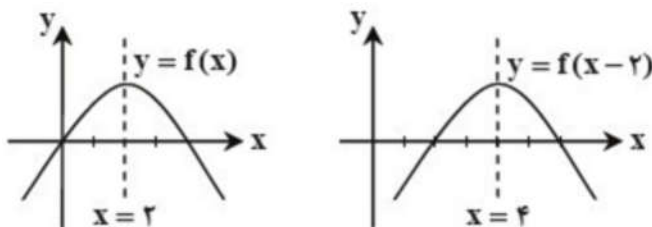
$$x = \frac{-b}{2a}$$

با توجه به نمودار، می‌توان فهمید ریشه‌های $f(x) = 0$ به صورت $x = 0$ و $x = 4$ هستند. پس می‌توان نوشت:

$$f(x) = ax(x - 4) = ax^2 - 4ax \Rightarrow y = f(x) : x = -\frac{-4a}{2a} = 2$$

می‌دانیم برای رسم تابع $y = f(x - 2)$ ، کافی است نمودار تابع f را ۲ واحد به سمت راست منتقل کنیم، بنابراین

معادله‌ی محور تقارن تابع $y = f(x - 2)$ عبارت است از: $x = 2 + 2 = 4$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. دقت کنید وقتی $x \geq 1$ باشد، $2 - x \leq 1$ است. به نحو مشابه اگر $x < 1$ باشد، آنگاه $3 - 2x > 1$ است. پس:

$$\text{fof}(x) = f(f(x)) = \begin{cases} 3 - 2(2 - x) = 2x - 1 & ; x \geq 1 \\ 2 - (3 - 2x) = 2x - 1 & ; x < 1 \end{cases}$$

بنابراین $\text{fof}(x) = 2x - 1$ یعنی $g(x) = 2x - 1$ پس $a = 2$ و $b = -1$ و $a + b = 1$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f\left(\frac{-x}{x+1}\right) = f\left(\frac{-x-1+1}{x+1}\right) = f\left(-1 + \frac{1}{x+1}\right)$$

با فرض $\frac{1}{x+1} = t$ و $x \neq -1$ خواهیم داشت:

$$f(-1+t) = t \xrightarrow{t=u+1} f(u) = u+1 \Rightarrow f(x) = x+1$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. تابع f یک تابع صعودی اکید است، زیرا $f(x) = (2x^3) + (x + 54)$ بنابراین چنانچه f با f^{-1} نقطه‌ی تلاقی داشته باشد، نقاط تلاقی روی خط $y = x$ خواهد بود. صعودی اکید

$$2x^3 + x + 54 = x \Rightarrow 2x^3 = -54 \Rightarrow x^3 = -27 \Rightarrow x = -3$$

$$\Rightarrow \text{نقطه تلاقی } A(-3, -3) \Rightarrow OA = \sqrt{x_A^2 + y_A^2} = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x^3} \quad x^2 - x^3 \geq 0 \Rightarrow x^2(1 - x) \geq 0$$

$$\Rightarrow D_f : [-1, 1] \Rightarrow D_{f(2x-1)} : -1 \leq 2x-1 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$$

$$D_f(2x-1) : [0, 1]$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$D_{f \times g} = D_{f \pm g} = D_f \cap D_g$$

مطابق نکته، دامنه‌ی تابع $f \times g$ برابر است با اشتراک دامنه‌ی توابع f و g : پس داریم:

$$D_{f \times g} = D_f \cap D_g = \{1, -1\} \Rightarrow f \times g = \{1, -2\}, (-1, 8)$$

$$\text{fog} = \left\{ (\sqrt{5}, 0), (\sqrt{3}, 0), (1, 4), (-1, 0) \right\} \quad \text{از طرفی داریم:}$$

$$D_{(\text{fog})+(f \times g)} = D_{\text{fog}} \cap D_{f \times g} = \{1, -1\} \quad \text{اکنون با داشتن توابع } f \times g \text{ و fog می‌توان نوشت:}$$

$$\text{fog} + f \times g = \{(1, -2+4), (-1, 8+0)\} = \{(1, 2), (-1, 8)\} \quad \text{بنابراین}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. باید دو تابع $y = \frac{ax+1}{2}$ و $y = 2ax-1$ معکوس هم باشند، اما معکوس تابع

$$y = \frac{ax+1}{2} \text{ به صورت زیر حساب می‌گردد:}$$

$$y = \frac{ax+1}{2} \Rightarrow 2y = ax+1 \Rightarrow x = \frac{2y-1}{a}$$

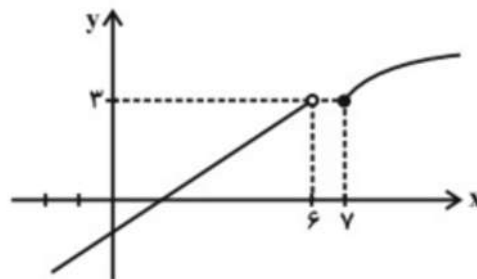
$$\xrightarrow{\text{با تعویض } x \text{ و } y} y = \frac{2x-1}{a} = 2ax-1 \Rightarrow a = 1$$

۶۱

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نمودار تابع $y = \sqrt{x+2}$ به ازای $x \geq -2$ به صورت زیر است:

حال باید مقدار ضابطه‌ی پایینی تابع حداکثر ۳ شود که این مقدار حداکثر باید به ازای $x = 6$ بدست آید. بنابراین:

$$2 + a \leq 3 \Rightarrow a \leq 1 \Rightarrow \max(a) = 1$$



۶۲

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \frac{x+1}{x+a} \Rightarrow f\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{-\frac{1}{x}+1}{-\frac{1}{x}+a} = \frac{\frac{-1+x}{x}}{\frac{-1+ax}{x}} = \frac{x-1}{ax-1}$$

$$f(x) \times f\left(-\frac{1}{x}\right) = -1 \Rightarrow \frac{x+1}{x+a} \times \frac{(x-1)}{ax-1} = -1 \Rightarrow a = -1$$

۶۳

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

نکته: به طور کلی در هر معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر جمع ریشه‌ها S و ضرب ریشه‌ها P باشد، این روابط برقرار است:

$$S = -\frac{b}{a}, P = \frac{c}{a}$$

a و b صفحهای چندجمله‌ای درجه دوم $f(x) = x^2 - (a+1)x - 3b$ می‌باشند، پس:

$$\begin{cases} a+b = -\frac{-(a+1)}{1} = a+1 \\ ab = \frac{-3b}{1} = -3b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 = 10$$

۶۴

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

نکته: اگر α و β ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، آن‌گاه: $S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}, P = \alpha\beta = \frac{c}{a}$

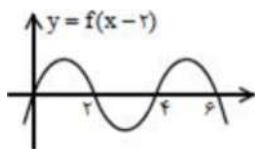
با توجه به شکل می‌توان فهمید معادله $x^2 - mx + m + \frac{5}{4} = 0$ دارای دو ریشه مثبت است (توجه کنید که نمودار

تابع $f(x)$ ، محور xها را در دو نقطه با طول مثبت قطع کرده است) پس می‌توان نتیجه گرفت:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \Rightarrow m^2 - 4\left(m + \frac{5}{4}\right) > 0 \Rightarrow m^2 - 4m - 5 > 0 \Rightarrow (m-5)(m+1) > 0 \Rightarrow \begin{cases} m > 5 \\ \text{یا} \\ m < -1 \end{cases} \\ S > 0 \Rightarrow m > 0 \\ P > 0 \Rightarrow m + \frac{5}{4} > 0 \Rightarrow m > -\frac{5}{4} \end{cases}$$

از اشتراک سه مورد بالا، حدود m به صورت $m > 5$ به دست می‌آید.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نمودار $y = f(x - 2)$ به صورت زیر خواهد بود:



پس دامنه تابع $y = \sqrt{f(x-2)}$ به صورت $[0, 2] \cup [4, 6]$ می باشد که دارای اعداد صحیح $\{0, 1, 2, 4, 5, 6\}$ می باشد یعنی شامل ۶ عدد صحیح است.

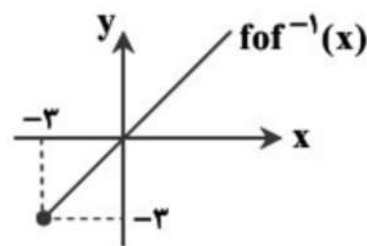
گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

نکته: در تابع وارون پذیر f داریم: $D_f = D_{f^{-1}}$, $R_f = D_{f^{-1}}$

راه حل اول: $(f^{-1} \circ f)(x) = x$; $x \in D_f$, $(f \circ f^{-1})(x) = x$; $x \in D_{f^{-1}}$

مطابق نکته، نمودار $(f \circ f^{-1})(x)$ همان نمودار تابع خطی $y = x$ با دامنه تابع f^{-1} است.

$$f(x) = \sqrt{x+2} - 3 \Rightarrow R_f = [-3, +\infty) \Rightarrow D_{f^{-1}} = [-3, +\infty)$$



راه حل دوم:

نکته: برای به دست آوردن ضابطه تابع وارون یک تابع یک به یک مانند $f(x)$ ، در معادله $y = f(x)$ در صورت امکان x را بر حسب y محاسبه می کنیم، سپس با تبدیل y به x ، ضابطه $f^{-1}(x)$ را به دست می آوریم.

در تابع f ، می دانیم $D_f = [-2, +\infty)$ و $R_f = [-3, +\infty)$. حال ضابطه تابع f^{-1} را به دست می آوریم:

$$y = \sqrt{x+2} - 3 \Rightarrow y+3 = \sqrt{x+2} \Rightarrow (y+3)^2 = x+2 \Rightarrow x = (y+3)^2 - 2$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = (x+3)^2 - 2$$

$$D_{f^{-1}} = [-3, +\infty), R_{f^{-1}} = [-2, +\infty)$$

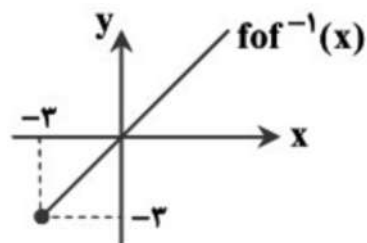
حال $(f \circ f^{-1})(x)$ را به دست می آوریم:

$$D_{f \circ f^{-1}} = \{x \in D_{f^{-1}} \mid f^{-1}(x) \in D_f\} = \{x \in [-3, +\infty) \mid ((x+3)^2 - 2) \in [-2, +\infty)\} = [-3, +\infty)$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f((x+3)^2 - 2) = \sqrt{(x+3)^2 - 2 + 2} - 3 = \sqrt{(x+3)^2} - 3$$

$$= |x+3| - 3 \stackrel{\text{مطابق دامنه}}{=} x+3-3 = x$$

بنابراین نمودار این تابع، خط $y = x$ با دامنه $[-3, +\infty)$ است که به صورت زیر می باشد:



۶۷

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با قرار دادن اعضای مجموعه A به جای x ، تابع f را می‌نویسیم:

$$f = \{(1, 5), (2, 3), (3, 1), (4, -1)\} \Rightarrow f^{-1}(3) = 2, f(1) = 5 \\ \Rightarrow f^{-1}(3) + f(1) = 2 + 5 = 7$$

۶۸

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. وارون f را به دست می‌آوریم:

$$y = x^2 + 2x + 4 \Rightarrow y = (x+1)^2 + 3 \Rightarrow (x+1)^2 = y-3 \\ \Rightarrow |x+1| = \sqrt{y-3} \xrightarrow{x \leq -1} -x-1 = \sqrt{y-3} \Rightarrow x = -\sqrt{y-3}-1 \\ f^{-1}(x) = -\sqrt{x-3}-1$$

پس ضابطه f^{-1} به صورت روبه‌رو است:

اکنون معادله زیر را حل می‌کنیم:

$$f^{-1}(x) = x+2 \Rightarrow -\sqrt{x-3}-1 = x+2 \\ -\sqrt{x-3} = x+3 \xrightarrow{\text{توان } 2} x-3 = x^2+6x+9 \\ \Rightarrow x^2+5x+12 = 0$$

معادله جواب ندارد ($\Delta < 0$).

۶۹

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ضابطه‌ی f را به صورت $f(x) = ax + b$ می‌نویسیم.

$$A(0, 2) \Rightarrow a(0) + b = 2 \Rightarrow b = 2 \\ B(-1, 0) \Rightarrow a(-1) + 2 = 0 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow f(x) = 2x + 2 \\ y = 2x + 2 \Rightarrow y-2 = 2x \xrightarrow{\div 2} \frac{y}{2} - 1 = x \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = \frac{x}{2} - 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - 1$$

۷۰

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. باید تابع ثابت باشد که یک به یک نباشد. بنابراین ضریب x را صفر قرار می‌دهیم.

$$a-2=0 \Rightarrow a=2 \Rightarrow f(x)=3 \xrightarrow{a=2} f(6+7)=f(13)=3$$

۷۱

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f^{-1}(2) = k \Rightarrow f(k) = 2 \Rightarrow k = 1 \\ (g + f^{-1})(2) = g(2) + f^{-1}(2) = 7 \Rightarrow 4 + b + 1 = 7 \Rightarrow b = 2$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. نکته ۱: اگر رابطه بین دو مجموعه به صورت زوج‌های مرتب داده شده باشد، رابطه‌ای را که از جابه‌جایی دو مؤلفه هر زوج مرتب رابطه به دست می‌آید، وارون آن رابطه

$$f^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in f\} \quad \text{می‌نامیم:}$$

نکته ۲: اگر f و g دو تابع باشند، تابع $f + g$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

برای به دست آوردن $f + g^{-1}$ ، ابتدا مطابق نکته ۱ تابع g^{-1} را به دست می‌آوریم.

$$g = \left\{ \left(1, \frac{2}{3} \right), (4, -1), (5, 1), (6, 4) \right\} \Rightarrow g^{-1} = \left\{ \left(\frac{2}{3}, 1 \right), (-1, 4), (1, 5), (4, 6) \right\}$$

با توجه به اینکه $D_{g^{-1}} = \left\{ \frac{2}{3}, -1, 1, 4 \right\}$ و $D_f = N$ ، مطابق نکته ۲ داریم:

$$D_f \cap D_{g^{-1}} = N \cap \left\{ \frac{2}{3}, -1, 1, 4 \right\} = \{1, 4\}$$

مقدار تابع را به ازای نقاط دامنه به دست آمده می‌نویسیم:

$$\begin{cases} (f + g^{-1})(1) = f(1) + g^{-1}(1) = 2 + 5 = 7 \\ (f + g^{-1})(4) = f(4) + g^{-1}(4) = 8 + 6 = 14 \end{cases} \Rightarrow f + g^{-1} = \{(1, 7), (4, 14)\}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. باید $\Delta < 0$ و $2m < 0$ باشد، در نتیجه:

$$\Delta = 9 - 16m^2 < 0 \Rightarrow m^2 > \frac{9}{16} \Rightarrow m < -\frac{3}{4}, m > \frac{3}{4}$$

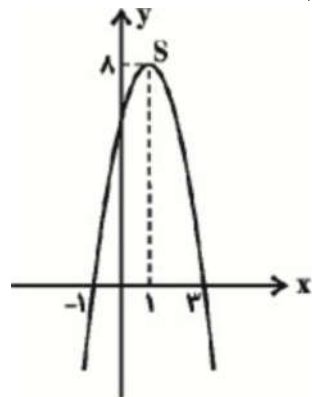
اما از آن‌جا که باید $m < 0$ باشد، مجموعه مقادیر m عبارت است از:

$$m \text{ مجموعه مقادیر } = \left(-\infty, -\frac{3}{4} \right)$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از آنجایی که سهمی محور طولها را نقطه‌ای به طولهای ۱- و ۳ قطع می‌کند، معادله آن به صورت زیر است:

$$y = a(x+1)(x-3) \xrightarrow{\text{سهمی} \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}} \\ 6 = a(0+1)(0-3) = a(1)(-3) \Rightarrow -3a = 6 \Rightarrow a = -2 \\ y = -2(x+1)(x-3) = -2(x^2 - 2x - 3) \\ \Rightarrow y = -2x^2 + 4x + 6 \\ \begin{cases} \text{طول راس سهمی: } x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(-2)} = 1 \\ \text{عرض راس سهمی: } y_s = -2(1)^2 + 4(1) + 6 \\ = -2 + 4 + 6 = 8 \end{cases}$$

پس فاصله رأس سهمی از محور طولها ۸ واحد است و گزینه «۱» صحیح است.



گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = (\sqrt{x})^{\log_3 x}$$

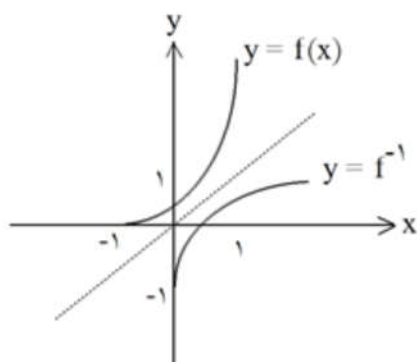
$$\left(\sqrt{x}\right)^{\log_3 x} = x^{\frac{1}{2} \log_3 x} = x^{\log_3 x^{\frac{1}{2}}} = x^{\log_3 \sqrt{x}} = \sqrt{x}$$

دامنه تابع g ، $x > 0$ است و دامنه تابع f برابر $\mathbb{R}$ است، بنابراین:

$$D_{f \circ g} = \{x > 0 \mid \underbrace{\log_3 x \in \mathbb{R}}\} = \{x > 0\} \Rightarrow f(g(x)) = \sqrt{x}, x > 0$$

همواره برقرار

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. نمودار $f(x) = (x+1)^2$ و وارونش را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:



$$f(x) = (x+1)^2$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. برای انتقال ۳ واحد به سمت چپ، باید به جای x ها، $x+3$ قرار دهیم. برای انتقال ۲ واحد به سمت پایین، باید سرانجام از کل ضابطه‌ی تابع ۲ واحد کم کنیم. اگر فرض کنیم اسم تابع جدید، $g(x)$ باشد، ضابطه‌ی $g(x)$ به فرم زیر است:

$$g(x) = \sqrt{2(x+3)} - 2 = \sqrt{2x+6} - 2$$

برای پیدا کردن محل برخورد با محور x ها، باید $y = 0$ قرار دهیم، یعنی $g(x) = 0$:

$$\sqrt{2x+6} - 2 = 0 \Rightarrow \sqrt{2x+6} = 2 \xrightarrow{\text{توان ۲}} 2x+6 = 4 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

چون $x = -\frac{1}{2}$ در معادله صدق می‌کند، قابل قبول است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$x=1 \rightarrow f(2 - f(1)) = 2 \Rightarrow f(2 - 4) = 2 \Rightarrow f(-2) = 2$$

$$x=-2 \rightarrow f(2 - f(-2)) = -4 \Rightarrow f(2 - 2) = -4 \Rightarrow f(0) = -4$$

$$x=0 \rightarrow f(2 - f(0)) = 0 \Rightarrow f(4) = 0$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. چون سهمی موردنظر محور x را فقط در نقطه $x = -2$ قطع می‌کند، یعنی یک ریشه مضاعف دارد و معادله آن به شکل زیر است:

$$y = a(x+2)^2$$

سهمی، محور عرض‌ها را در $-\frac{4}{b}$ قطع می‌کند.

$$\left. \begin{aligned} x=0 \Rightarrow y=4a = -\frac{4}{b} \Rightarrow b = -\frac{1}{a} \\ y = a(x+2)^2 = ax^2 + 4ax + 4a = ax^2 - bx + c \Rightarrow 4a = -b \\ \Rightarrow 4a = -\left(-\frac{1}{a}\right) \Rightarrow a^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow a = \pm \frac{1}{2} \end{aligned} \right\}$$

سهمی پایین محور x ها قرار دارد
 $\Rightarrow -\frac{1}{2}$

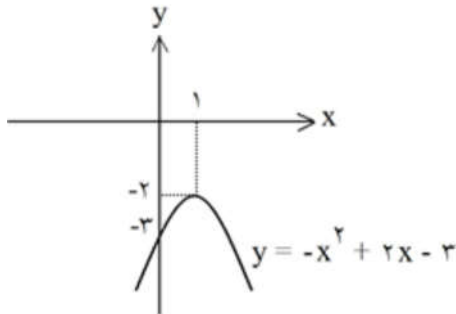
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۸۰

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in Q \\ 0 & x \notin Q \end{cases} \Rightarrow f(x) \in Q \Rightarrow f(f(x)) = f(1) = 0$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۸۱

$$y = -(x^2 - 2x + 3) \Rightarrow y = -(x^2 - 2x + 1 + 2) \Rightarrow y = -(x^2 - 2x + 1) - 2 \\ \Rightarrow y = -(x - 1)^2 - 2$$

کافی است سهمی $y = -x^2$ را یک واحد به راست و ۲ واحد به پایین منتقل کنیم:



از نواحی اول و دوم عبور نمی‌کند. $\Rightarrow$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. برای محاسبه $f(-1)$ باید معادله‌ی خط گذرا از نقاط $(0, 0)$ و $(-2, 3)$ را بنویسیم:

$$m = \frac{3 - 0}{-2 - 0} = -\frac{3}{2} \Rightarrow f(x) = -\frac{3}{2}x \xrightarrow{x=-1} f(-1) = -\frac{3}{2}(-1) = \frac{3}{2} \Rightarrow (f+g)(-1) \\ = f(-1) + g(-1) = \frac{3}{2} + 0 = \frac{3}{2}$$

از طرفی داریم:

$$g(0) = 1 \Rightarrow fog(0) = f(g(0)) = f(1)$$

برای محاسبه‌ی $f(1)$ باید معادله‌ی خط گذرا از $(0, 0)$ و $(2, 3)$ را بنویسیم:

$$m = \frac{3 - 0}{2 - 0} = \frac{3}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{3}{2}x \xrightarrow{x=1} f(1) = \frac{3}{2}$$

$$fog(0) = f(1) = \frac{3}{2} \quad \text{بنابراین:}$$

$$\frac{(f+g)(-1)}{1 + fog(0)} = \frac{\frac{3}{2}}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{3}{5}$$

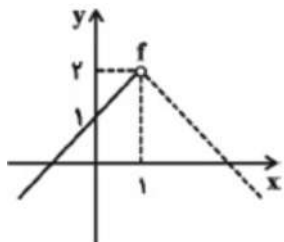
و در نتیجه داریم:

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اول ضابطه $f(x)$ را برای $x < 1$ پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = 2 - |1 - x| \xrightarrow{x < 1} f(x) = 2 - (1 - x) = x + 1$$

$$y = x + 1 \Rightarrow y - 1 = x \Rightarrow f^{-1}(x) = x - 1$$

باید برد تابع f را برای $x < 1$ پیدا کنیم. نمودار f را رسم می‌کنیم. توجه کنید که $|1 - x| = |x - 1|$ است. با توجه به شکل برد تابع f برای $x < 1$ برابر $(-\infty, 2)$ است.



در نتیجه $D_{f^{-1}} = (-\infty, 2)$ است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$3 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 3$$

$$g(3 - x^2) = \frac{(x^2)^2 + 1}{x^2 + 2} \xrightarrow{x^2=3} g(0) = \frac{(3)^2 + 1}{3 + 2} = \frac{10}{5} = 2$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. باید نامعادله $g(x) < 0$ حل شود.

$$g(x) = x(x^2 - 3x + 2) = x(x^2 - x - 2x + 2) = x(x(x - 1) - 2(x - 1)) < 0$$

$$x(x(x - 1)(x + 1) - 2(x - 1)) = x((x - 1)(x^2 + x - 2)) = x(x - 1)(x - 1)(x + 2) < 0$$

$$x(x - 1)^2(x + 2) < 0 \xrightarrow{(x-1)^2 \geq 0} x(x + 2) < 0 \Rightarrow -2 < x < 0$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = ax + b$$

$$f(1) = 3 \Rightarrow a + b = 3$$

$$f^{-1}(7) = 3 \Rightarrow f(3) = 7 \Rightarrow 3a + b = 7$$

$$-1 \times \begin{cases} a + b = 3 \\ 3a + b = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a - b = -3 \\ 3a + b = 7 \end{cases} \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow b = 1$$

$$f(x) = 2x + 1$$

$$f^{-1}(3) = k \Rightarrow f(k) = 3 \Rightarrow 2k + 1 = 3 \Rightarrow 2k = 2 \Rightarrow k = 1$$

$$f(4 - f^{-1}(3)) = f(4 - 1) = f(3) = 7$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در تابع معکوس جای دامنه و برد عوض می‌شود. بنابراین اگر برد $f(x)$ را حساب کنیم دامنه f^{-1} را حساب کرده‌ایم.

$$-3 \leq x \leq 6 \xrightarrow{\times \frac{1}{3}} -1 \leq \frac{1}{3}x \leq 2 \xrightarrow{-1} -3 \leq \frac{1}{3}x - 1 \leq 3 \Rightarrow -3 \leq y \leq 3 \Rightarrow R_f = [-3, 3]$$

$$\Rightarrow D_{f^{-1}} = [-3, 3]$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۸۸

$$D_f = [-2, 1] \Rightarrow -2 \leq x + 2 \leq 1 \Rightarrow -4 \leq x \leq -1$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۸۹

$$y = 3^{2x-1} \Rightarrow 2x - 1 = \log_3 y \Rightarrow x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log_3 y$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2} + \log_3 \sqrt{x}$$
 پس

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ریشه‌های معادله به صورت $x' > x'' > 0$ باشد.

$$\left(\Delta > 0, \frac{c}{a} > 0, \frac{-b}{a} > 0 \right) \Rightarrow \left(m^2 + 24m > 0, \frac{-3m}{2} > 0, \frac{m}{2} > 0 \right)$$

نامساوی‌های فوق مقدار مشترک ندارند پس هیچ مقدار m

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ضابطه معکوس تعیین شود. ۹۱

$$y = 2x - 5 \Rightarrow x = \frac{y+5}{2}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x+5}{2} \Rightarrow f^{-1}(-2) = \frac{3}{2}, f^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{13}{4}$$

$$\frac{3}{2} + \frac{13}{4} = \frac{19}{4}$$
 مجموع آن‌ها

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۹۲

$$\frac{2x-1}{x+2} = 3 \Rightarrow x = -7 \Rightarrow g^{-1}(3) = -7$$

$$g^{-1}(3) + f^{-1}(3) = -7 + 4 = -3$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۹۳

$$x + \frac{1}{x} = t \xrightarrow{\text{به توان می‌رسانیم}} x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = t^2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2 \Rightarrow f(t) = t^2 - 2 + 1$$

$$\Rightarrow f(t) = t^2 - 1$$

$$f(x+1) = (x+1)^2 - 1 \Rightarrow f(x+1) = x^2 + 2x + 1 - 1 \Rightarrow f(x+1) = x^2 + 2x$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. $f(x)$ را مربع کامل می‌کنیم: ۹۴

$$f(x) = (x-2)^2 - 3 \xrightarrow{\text{تبدیل } x \text{ به } x+2} f(x+2) = x^2 - 3 \Rightarrow f(x+2) + 3 = x^2$$

$$\Rightarrow g(x) = f(x+2) + 3$$

پس ابتدا نمودار $f(x)$ را دو واحد انتقال طولی به سمت چپ، سپس سه واحد انتقال عرضی به سمت بالا می‌دهیم و به نمودار $g(x)$ می‌رسیم.

۹۵

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مفهوم سؤال این است که دو خط (دو تابع) وارون یکدیگرند. پس کافی است دو نقطه را نسبت به خط $y = x$ قرینه کنیم.

از خط $2x - 3y = 1$ دو نقطه $(2, 1)$ و $(-1, -1)$ را انتخاب می‌کنیم. نقاط $(1, 2)$ و $(-1, -1)$ روی $ax + by = 2$ قرار دارند.

$$\begin{cases} a + 2b = 2 \\ -a - b = 2 \end{cases} \xrightarrow{+} b = 4, a = -6 \Rightarrow (a, b) = (-6, 4)$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۹۶

با توجه به صورت سؤال می‌دانیم $f(\sqrt[5]{x} + 1) = \frac{5x - 1}{13}$. می‌خواهیم مقدار $f(3)$ را بیابیم.

$$\sqrt[5]{x} + 1 = 3 \Rightarrow \sqrt[5]{x} = 2 \Rightarrow x = 8$$

اکنون با قرار دادن $x = 8$ در طرفین تساوی $f(\sqrt[5]{x} + 1) = \frac{5x - 1}{13}$ خواهیم داشت:

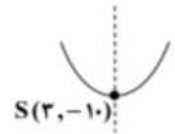
$$f(3) = \frac{40 - 1}{13} = \frac{39}{13} = 3$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۹۷

نکته: تابع $f(x)$ را اکیداً صعودی می‌نامیم، هرگاه برای هر دو نقطه‌ی x_1 و x_2 از دامنه‌اش که $x_1 < x_2$ داشته باشیم: $f(x_1) < f(x_2)$

توجه کنید که نمودار تابع f ، یک سهمی رو به بالا است که طول رأس آن برابر $3 = \frac{-b}{2a}$ است. x_s

با توجه به شکل مقابل، نمودار این تابع در بازه‌ی $(3, +\infty)$ و هر زیر مجموعه از آن اکیداً صعودی است. بنابراین حداقل مقدار a برابر ۳ است.



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۹۸

$$y = (x - 1)^2 + 2 \Rightarrow x = 1 + \sqrt{y - 2} \Rightarrow f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x - 2}, x \geq 2$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۹۹

$$f(x^2) : \text{دامنه } 1 \leq x^2 < 4 \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq x < 2 \\ \text{یا} \\ -2 < x \leq -1 \end{cases} \quad (1)$$

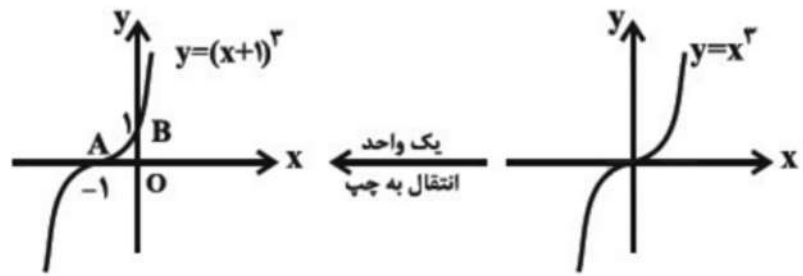
$$g(3 - 2x) : \text{دامنه } 2 < 3 - 2x < 9 \Rightarrow -1 < -2x < 6$$

$$\Rightarrow -3 < x < \frac{1}{2} \quad (2)$$

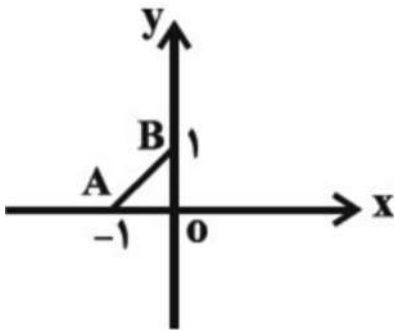
$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} D_h = \left(-2, -1 \right]$$

۱۰۰

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نمودار تابع $y = (x+1)^2$ را به کمک نمودار تابع $y = x^2$ رسم می‌کنیم.



شکل مورد نظر، مثلث AOB در نمودار زیر است که مساحت آن $\frac{1}{2}$ می‌باشد.



$$S_{\triangle OAB} = \frac{OB \times OA}{2} = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$$

۱۰۱

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$(4, 4) \in \text{fog} \Rightarrow f(g(4)) = 4 \Rightarrow (g(4), 4) \in f$$

$$a = g(4) = 4$$

$$(b, 1) \in \text{fog} \Rightarrow f(g(b)) = 1 \Rightarrow (g(b), 1) \in f \Rightarrow g(b) = 12$$

$$\Rightarrow b + \sqrt{b} = 12 \xrightarrow{\sqrt{b}=t, t \geq 0} t^2 + t - 12 = 0$$

$$\Rightarrow (t+4)(t-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t=3 & \text{ق ق} \\ t=-4 & \text{غ ق ق} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{b} = 3 \Rightarrow b = 9$$

$$\Rightarrow a + b = 15$$

۱۰۲

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

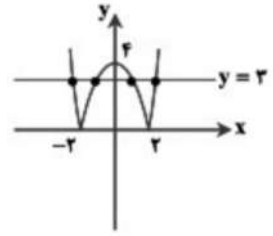
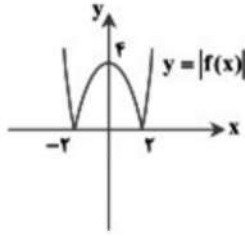
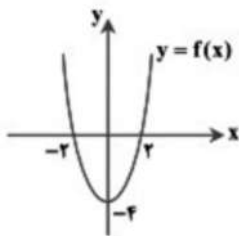
نکته: با محدودکردن دامنه‌ی تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ به بازه‌های $\left(-\infty, \frac{-b}{2a}\right]$ یا $\left[\frac{-b}{2a}, +\infty\right)$ یا زیر

مجموعه‌های هر یک از این بازه‌ها، می‌توان تابع یک‌به‌یک ساخت.

با توجه به نکته‌ی بالا، با محدودکردن دامنه‌ی این تابع درجه دوم به بازه‌های $\left(-\infty, 2\right]$ یا $\left[2, +\infty\right)$ یا زیر مجموعه‌های

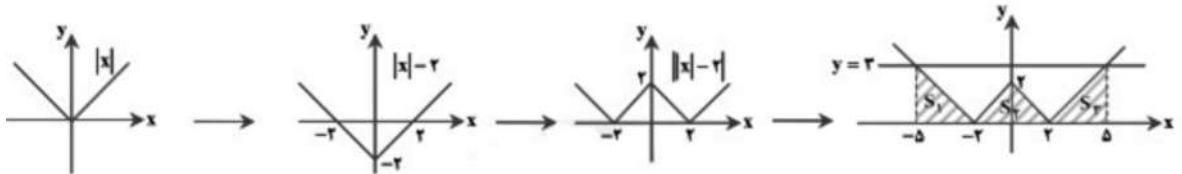
هر یک از این بازه‌ها، می‌توان تابع یک‌به‌یک ساخت. با توجه به گزینه‌ها، گزینه‌ی ۱ پاسخ است.

نکته: برای رسم نمودار $y = |f(x)|$ ، کافی است نمودار $y = f(x)$ را رسم کنیم و در قسمت‌هایی که نمودار $y = f(x)$ زیر محور x ‌ها است، قرینه‌ی آن را نسبت به محور x ‌ها رسم کنیم. ابتدا نمودار تابع $y = |f(x)|$ را با توجه به نکته‌ی بالا رسم می‌کنیم:



با توجه به شکل بالا واضح است که خط $y = 3$ ، نمودار تابع $y = |f(x)|$ را در ۴ نقطه قطع می‌کند.

نکته: برای رسم نمودار $y = f(x) + k$ ، اگر $k > 0$ ، کافی است نمودار تابع $f(x)$ را رسم کنیم و در جاهایی که نمودار $f(x)$ زیر محور x ‌هاست، تصویر آینه‌وار نمودار $f(x)$ را نسبت به محور x ‌ها رسم کنیم. نمودار $y = ||x| - 2|$ را در چند مرحله رسم می‌کنیم.



سطح بین نمودار تابع $y = ||x| - 2|$ و خط $y = 3$ ، از تفاضل مساحت سه مثلث هاشورزده از مساحت مستطیل به ابعاد ۱۰ و ۳ به دست می‌آید. داریم:

$$S = \text{مساحت مستطیل} - (S_1 + S_2 + S_3) = 10 \times 3 - \frac{1}{2} (3 \times 3 + 2 \times 4 + 3 \times 3) = 30 - 13 = 17$$

نکته: در تابع وارون‌پذیر f ، اگر $f(a) = b$ آن‌گاه: $f^{-1}(b) = a$

ابتدا فرض می‌کنیم $a = f^{-1}(1)$ ، در این صورت مطابق نکته $g(a) = 1$ ، پس می‌توان نوشت:

$$\frac{2a}{a+1} = 1 \Rightarrow 2a = a+1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow g^{-1}(1) = 1$$

با توجه به تساوی داده‌شده در صورت سؤال می‌توان نتیجه گرفت:

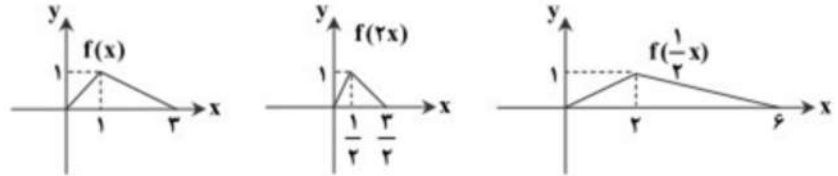
$$f^{-1}(2\alpha - 1) = 1 \Rightarrow f(1) = 2\alpha - 1 \xrightarrow{(1,2) \in f} 3 = 2\alpha - 1 \Rightarrow \alpha = 2$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۰۶

نکته: برای رسم نمودار تابع $y = f(kx)$ ، کافی است طول نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم. اگر $k > 1$ ، نمودار $y = f(kx)$ از انقباض افقی نمودار $y = f(x)$ در راستای محور x ها به دست می‌آید و اگر $0 < k < 1$ ، این نمودار از انبساط افقی نمودار $y = f(x)$ حاصل می‌شود.

با توجه به نکته، فقط گزینه‌ی ۱ از انقباض افقی نمودار تابع $y = f(x)$ به دست می‌آید. به طور مثال اگر نمودار

$y = f(x)$ به صورت زیر باشد، نمودارهای $f\left(\frac{1}{2}x\right)$ و $f(2x)$ به صورت زیر هستند:

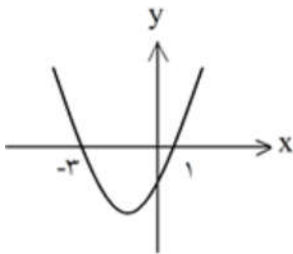


گزینه ۴ پاسخ صحیح است. کافی است نمودار تابع را رسم کنیم. ۱۰۷

$$y = x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 1, -3$$

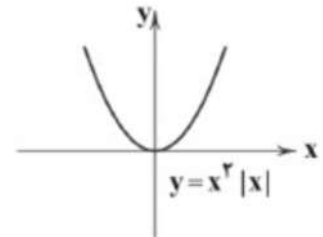
نمودار رو به بالا $a = 1 > 0$

با توجه به نمودار مشاهده می‌شود که نمودار باید حداقل ۳ واحد به سمت x های مثبت منتقل شود تا طول نقاط تلاقی آن با محور x ها غیرمنفی شود.



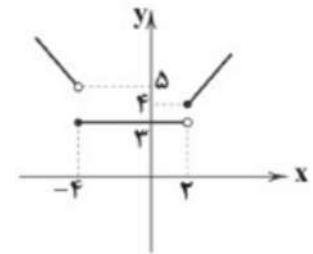
گزینه ۲ پاسخ صحیح است. این تابع برای x های نامنفی x^2 است و برای x های منفی $-x^2$ است. نمودارش را ببینید. ۱۰۸

ملاحظه می‌کنید که تابع در فاصله‌ی $(-\infty, 0]$ نزولی اکید است، پس بیش‌ترین مقدار a برابر صفر است.



۱۰۹

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ضابطه‌ی اول برای $x < -4$ تعریف می‌شود و نزولی اکید است. ضابطه‌ی دوم برای $-4 \leq x < 2$ تعریف می‌شود و ثابت است. ضابطه‌ی سوم برای $x \geq 2$ تعریف می‌شود و صعودی اکید است. تابع در فاصله‌ی $(-4, +\infty)$ صعودی است.



۱۱۰

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x); D_{f-g} = D_f \cap D_g$$

نکته ۲: اگر تابع f وارون‌پذیر باشد، داریم:

$$f \circ f^{-1}(x) = x \quad (x \in R_f), \quad f^{-1} \circ f(x) = x \quad (x \in D_f)$$

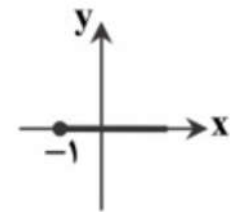
با توجه به اینکه $D_f = [-1, +\infty)$ و $R_f = [-2, +\infty)$ می‌توان نوشت:

$$f^{-1} \circ f(x) = x \quad (x \geq -1), \quad f \circ f^{-1}(x) = x \quad (x \geq -2)$$

اکنون با توجه به نکته ۱ می‌توان نتیجه گرفت:

$$y = f^{-1} \circ f(x) - f \circ f^{-1}(x) = x - x = 0 \quad (x \geq -1 \text{ با شرط } ۱)$$

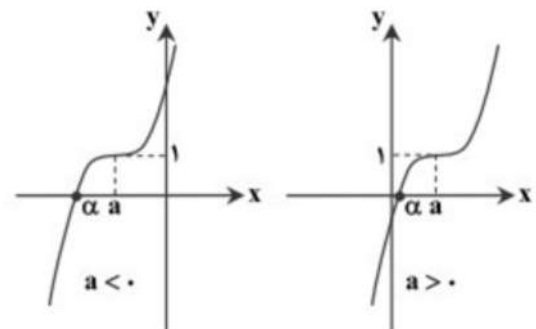
پس باید نمودار تابع $y = 0$ را با شرط $x \geq -1$ رسم کنیم که به شکل زیر است:



۱۱۱

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا تابع $y = f(x) + |f(x)|$ را تشکیل می‌دهیم.

نمودار f با فرض $a > 0$ یا $a < 0$ به صورت زیر است:



اگر بخواهیم تابع y اکیداً صعودی باشد، باید تابع f حتماً نامنفی باشد. زیرا اگر تابع f منفی باشد، مقدار آن در تابع y صفر می‌شود که یک تابع اکیداً صعودی نیست. پس تابع f حتماً باید در بازه‌ی $[1, +\infty)$ نامنفی باشد یا به عبارت دیگر نقطه‌ی α باید از عدد ۱ بزرگ‌تر نباشد. از طرفی $f(\alpha) = 0$ است. پس می‌توان نوشت:

$$f(\alpha) = 0 \Rightarrow (\alpha - a)^2 + 1 = 0 \Rightarrow (\alpha - a)^2 = -1 \Rightarrow \alpha - a = -1$$

$$\Rightarrow \alpha = a - 1 \Rightarrow \alpha \leq 1 \Rightarrow a - 1 \leq 1 \Rightarrow a \leq 2$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. کافی است طول نقاط نمودار اولیه در $\frac{1}{p}$ ضرب شود پس انقباض افقی است. ۱۱۲

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۱۳

$$y = \frac{2x - 5}{3x - 4} \Rightarrow 3xy - 4y = 2x - 5 \Rightarrow x = \frac{4y - 5}{3y - 2}$$

$$f^{-1}(2x + 1) = \frac{4(2x + 1) - 5}{3(2x + 1) - 2} = \frac{8x - 1}{6x + 1}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۱۴

اتحاد مکعب دوجمله‌ای: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$$\begin{cases} a^3 = x^3 \Rightarrow a = x \\ 3a^2b = 3x^2 \xrightarrow{a=x} 3x^2b = 3x^2 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow b^3 = 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \underbrace{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}_{\text{اتحاد مکعب دوجمله‌ای}} - 1 + 7 \Rightarrow f(x) = (x + 1)^3 + 6 \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = 6 \end{cases}$$

اتحاد مکعب دوجمله‌ای

$$m + n = 7$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. وقتی $-3 < -x < -2$ است و داریم: $[x] = 2, [-x] = -3$ پس: $f(x) = -3x + 2$ ۱۱۵

برای محاسبه $f^{-1}(-5)$ باید $f(x)$ را مساوی -5 قرار دهیم:

$$-3x + 2 = -5 \Rightarrow 3x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{3} \Rightarrow f\left(\frac{7}{3}\right) = -5 \Rightarrow f^{-1}(-5) = \frac{7}{3}$$

توجه: اگر مقدار x بین ۲ و ۳ نمی‌شد باید «ناموجود» را انتخاب می‌کردیم.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا دقت کنیم که اگر $x = -3$ باشد، داریم: ۱۱۶

$$g(-3) = f(-1)$$

حال در عبارت صورت سؤال به جای $f(-1)$ ، $g(-3)$ باشد، داریم:

$$f^{-1}(g^{-1}(f(-1))) = f^{-1}(g^{-1}(g(-3)))$$

$$= f^{-1}(-3) = \frac{(-3)^3}{9} + \sqrt[3]{9(-3)} = -3 + (-3) = -6$$

توجه داشته باشید:

$$(x \in D_g) : g^{-1}(g(x)) = x$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ظاهر چندجمله‌ای، درجه سوم است، اما می‌توان ضرایب را طوری تعیین کرد که چندجمله‌ای ۱۱۷

به درجه دوم تبدیل شود. کافی است ضریب x^3 را برابر صفر قرار دهیم. برای این منظور تابع را به ساده‌ترین شکل ممکن تبدیل می‌کنیم:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 3(x^3 - 2x + 1) + mx + mx^3$$

$$f(x) = (m + 1)x^3 + 6x^2 + (m - 3)x + 4$$

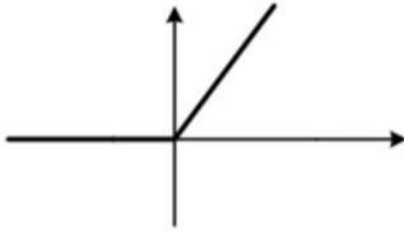
اگر $m + 1 = 0$ صفر شود، چندجمله‌ای درجه دوم می‌شود:

$$m + 1 = 0 \Rightarrow m = -1 \Rightarrow f(x) = 6x^2 - 4x + 4 \Rightarrow f(1) = 6$$

$$y = x + x = 2x \quad x \geq 0$$

$$y = x - x = 0 \quad x < 0$$

در بازه‌ای که تابع ثابت است می‌توان صعودی و هم نزولی باشد پس تابع در $(-\infty, +\infty)$ صعودی است.



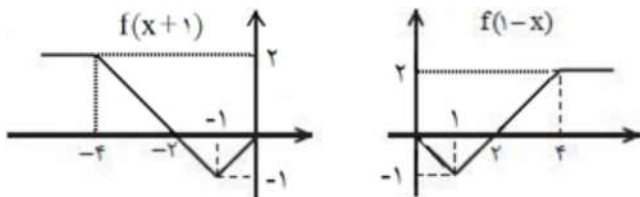
گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۱۹

$$g \circ f^{-1}(a) = 5 \Rightarrow g^{-1}(5) = f^{-1}(a)$$

$$g^{-1}(5) = \frac{2 \cdot 5 - 9}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow f^{-1}(a) = \frac{1}{4} \Rightarrow f\left(\frac{1}{4}\right) = a \Rightarrow f\left(\frac{1}{4}\right) = 1 \Rightarrow a = 1$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۲۰

$$f(x-1) \xrightarrow{\text{واحد به چپ}} f(x+2-1) = f(x+1) \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور yها}} f(-x+1)$$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۲۱

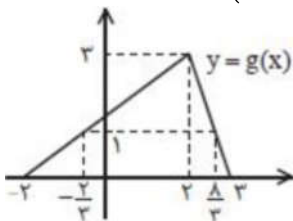
$$f(3x-2) = 9x^2 - 12x + 10 = 9x^2 - 12x + 4 + 6 = (3x-2)^2 + 6$$

اگر $3x-2 = t$ باشد، آن‌گاه $f(t) = t^2 + 6$ است، پس $f(\sqrt{5}) = 5 + 6 = 11$ می‌شود.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۲۲ $f(x) = \text{Log}(x^2 - x)$ است، پس باید $x^2 - x > 0$ باشد یعنی $x > 1$ یا $x < 0$ است،

بنابراین شرط دامنه $\text{fog}(x)$ این است که $g(x) > 1$ یا $g(x) < 0$ باشد. با توجه به نمودار تابع $y = g(x)$ اصلاً منفی

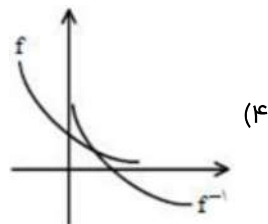
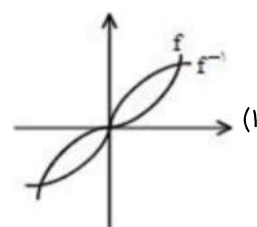
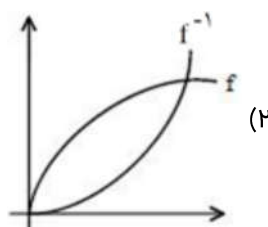
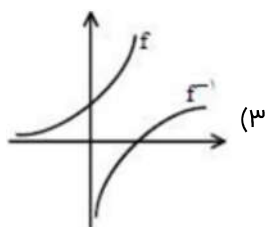
نمی‌شود، پس باید فاصله‌هایی را پیدا کنیم که $g(x) > 1$ است که این اتفاق در فاصله $\left(-\frac{2}{3}, \frac{8}{3}\right)$ رخ می‌دهد.



$$b - a = \frac{8}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{10}{3}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بررسی گزینه‌ها:

۱۲۳



گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۱۲۴

تابع $g(x)$ با دامنه R^+ صعودی است $0 \leq x - [x] < 1 \Rightarrow 0 \leq f(x) < \frac{1}{2}$

پس $\text{Log} \frac{1}{2} < \text{Log} f(x) < \text{Log} \frac{1}{2}$ در نتیجه $\text{Log} f(x) < -1$ پس برد آن بازه $(-\infty, -1)$ است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۱۲۵

برای تعیین ضابطه f^{-1} مقدار x را برحسب y محاسبه کرده سپس جای x و y عوض می‌شود.

$$y = \frac{2x-5}{3x-2} \Rightarrow 3xy - 2y - 2x = -5 \Rightarrow x = \frac{2y-5}{3y-2}$$

پس ضابطه $f^{-1}(x)$ برابر $\frac{2x-5}{3x-2}$ است.

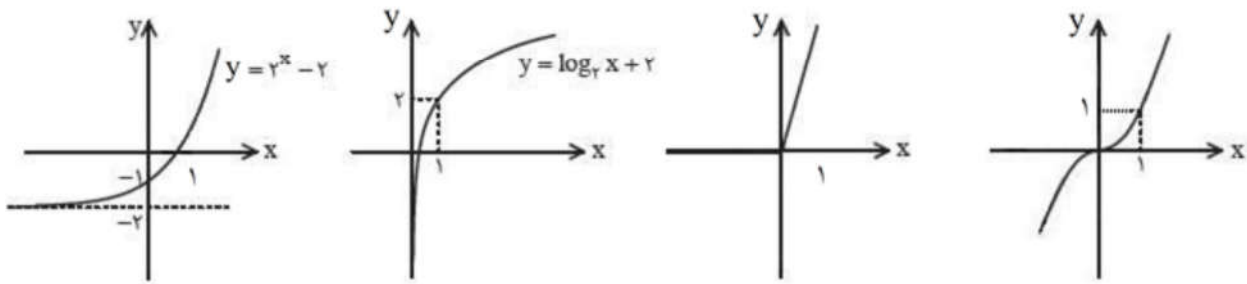
گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۱۲۶

$$g(f(x)) = \sqrt{f(x)(f(x)-2)} = \sqrt{\frac{x-3}{x} \times \frac{-x-3}{x}} = \sqrt{\frac{9-x^2}{x^2}} \Rightarrow 9-x^2 \geq 0, x \neq 0$$

پس دامنه تابع مطلوب $[-3, 3] - \{0\}$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نمودار توابع داده شده را رسم می‌کنیم:



$$f(x) = 2x + |2x| = \begin{cases} 4x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad f(x) = x|x| = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$

توابع $f(x) = 2^x - 2$, $f(x) = \log_2 x + 2$ و $f(x) = x|x|$ در دامنه خود اکیداً صعودی هستند ولی توابع $f(x) = 2x + |2x|$ در دامنه‌اش صعودی است (ولی اکیداً صعودی نیست) زیرا در $x \leq 0$ به تابع ثابت $y = 0$ تبدیل می‌شود، بنابراین گزینه (۳) جواب است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چون تابع x^3 نزولی اکید است پس تابع $4 - x^3$ نیز نزولی اکید خواهد بود. تابع $\sqrt{x-1} - 2$ صعودی اکید، تابع $\log x - 1$ صعودی اکید و تابع $|x+2|$ غیریکنواست.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

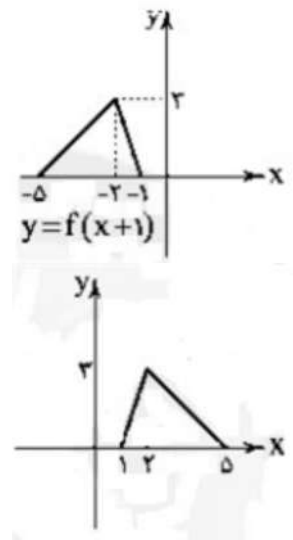
برای تبدیل $y = f(x-1)$ به $g(x) = f(1-x)$ مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

(۱) در تابع $f(x-1)$ ، x را به $x+2$ تبدیل می‌کنیم. $f(x-1)$ به $f(x+1)$ تبدیل و نمودار آن دو واحد به چپ منتقل می‌شود.

(۲) در تابع $f(x+1)$ ، x را به $-x$ تبدیل می‌کنیم.

(۳) $f(x+1)$ به $f(x-1)$ تبدیل و نمودار آن نسبت به محور y ها متقارن می‌شود.

با توجه به گزینه‌ها فقط خط $x = 4$ تابع g را قطع می‌کند.



۱۳۰

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در ابتدا مجموعه‌ی داده شده باید تابع باشد؛ بنابراین:

$$m^2 - m = 6 \Rightarrow m = -2 \text{ یا } m = 3 \Rightarrow \begin{cases} m = -2 \Rightarrow (1, 6), (0, 6) \in f \\ m = 3 \Rightarrow (3, 4), (5, 4) \in f \end{cases}$$

بنابراین در هر دو صورت تابع یک به یک و وارون‌پذیر نخواهد بود.

در نتیجه هیچ مقدار از f, m را وارون‌پذیر نخواهد کرد.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۳۱

$$f^{-1} = \{(0, 2), (1, 0), (2, 4), (3, 1)\}$$

$$g = \{(1, 3), (2, 2), (3, 0), (4, 1)\} \Rightarrow f^{-1} \circ g = \{(1, 1), (2, 4), (3, 2), (4, 0)\}$$

$$D = D_g \cap D_{f^{-1} \circ g} = \{x \mid f^{-1} \circ g(x) = 0\} \quad \text{حال برای دامنه‌ی تابع } \frac{g}{f^{-1} \circ g} \text{ داریم:}$$

$$\Rightarrow D = \{1, 2, 3\} \Rightarrow \frac{g}{f^{-1} \circ g} = \left\{ (1, 3), \left(2, \frac{1}{2}\right), (3, 0) \right\}$$

بنابراین مجموعه‌ی $\left\{0, \frac{1}{2}, 3\right\}$ برد تابع $\frac{g}{f^{-1} \circ g}$ است که مجموع اعضای آن برابر $\frac{3}{2}$ است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۳۲

$$D_f = R, D_g = [-1, +\infty), D_{f \circ g} = \{x \mid x \in D_g, g(x) \in D_f\} \Rightarrow$$

$$D_{f \circ g} = \left\{x \mid x \in [-1, +\infty), \sqrt{x+1} \in R\right\} = [-1, +\infty)$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۳۳

$$\frac{\text{واحد به چپ}}{x \rightarrow x+3} \rightarrow 2(x+2)^2 - 6(x+2) + 3 = 2x^2 + 2x - 1 \xrightarrow[\text{واحد به پایین}]{f(x) \rightarrow f(x) - \frac{1}{2}} 2x^2 + 2x - \frac{3}{2}$$

$$2x^2 + 2x - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow |x_2 - x_1| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{4+12}}{2} = 2$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۳۴

$$D_f = R - \{-1, 1\}, D_g = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$$

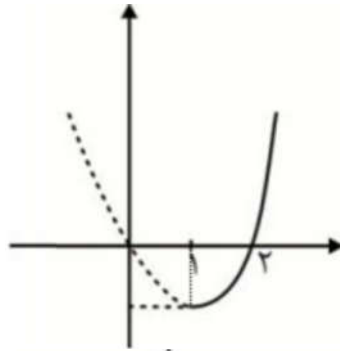
$$D_{f \circ g} = \{x \mid x \in D_g, g(x) \in D_f\}$$

$$\Rightarrow D_{f \circ g} = \left\{x \mid x \in R - (-2, 2), \sqrt{x^2 - 4} \in R - \{-1, 1\}\right\}$$

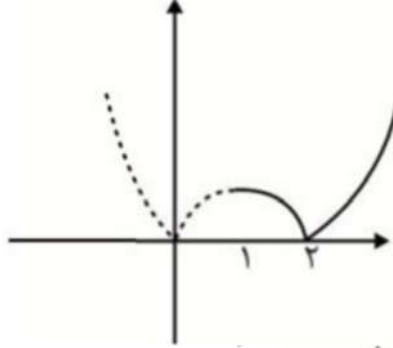
$$x^2 - 4 \neq 1 \Rightarrow x \neq -\sqrt{5}, \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow D_{f \circ g} = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty) - \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$$

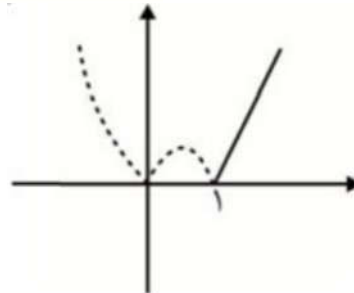
$$\text{الف) } y = (x - 1)^2 - 1$$



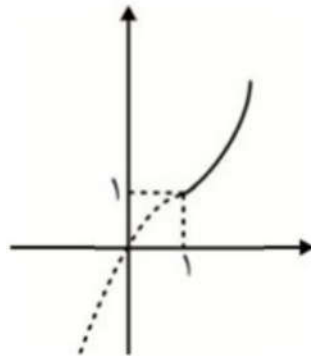
$$\text{ب) } y = |x^2 - 2x|$$



ج)



$$\text{د) } y = x^3 - 3x^2 + 3x = (x - 1)^3 + 1$$

نمودارهای الف، ج و د در $(1, +\infty)$ خطوط افقی را تنها در یک نقطه قطع می‌کنند.گزینه ۳ پاسخ صحیح است. هر سهمی به معادله‌ی $y = ax^2 + bx + c$ ، به ازای $x \geq -\frac{b}{2a}$ یا $x \leq -\frac{b}{2a}$ یا هر

محدوده‌ای که زیرمجموعه‌ی یکی از این دو محدوده باشد یک به یک است. طول رأس این سهمی را حساب می‌کنیم:

$$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{12}{4} = -3$$

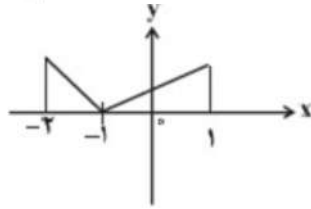
تنها گزینه‌ای که شرط بالا را دارد گزینه‌ی ۳ است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا توجه کنید که از $f^{-1}(2) = -3$ نتیجه می‌شود، $f(-3) = 2$ ، بنابراین:

$$f(-3) = \frac{a+1}{-3+2} - 1 = 2 \Rightarrow -a-1 = 3 \Rightarrow a = -4$$



به صورت مقابل رسم می‌کنیم:

دامنه‌ی تابع کسری y از اشتراک دامنه‌های تابع صورت و تابع مخرج، منهای ریشه‌های تابع مخرج به دست می‌آید،

$$D_y = [-2, 1] \cap [-2, 1] - \{-2, 1\} = (-2, 1) \quad \text{بنابراین:}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اگر $y = f(x)$ را ۲ واحد به سمت چپ انتقال دهیم، به $y = f(x+2)$ تبدیل می‌شود. پس کافی است که در ضابطه $f(x+1)$ به جای x ، $x+1$ را قرار دهیم:

$$f(x+1) = x^2 - 3x = x(x-3) \Rightarrow f(x+2) = (x+1)(x-2) = x^2 - x - 2$$

حال نمودار جدید را ۴ واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم:

$$y = f(x+2) - 4 = x^2 - x - 6$$

تقاطع این نمودار با محور x ها برابر است با:

$$x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+2) = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ و } -2$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا ضابطه $g(f(x))$ را تشکیل می‌دهیم: ۱۴۰

$$g(f(x)) = a(1-2x) - 1 = a - 2ax - 1$$

اکنون چون $g(f(x))$ و g روی محور x ها متقاطع‌اند، پس طول نقطه تقاطع برابر با ریشه g و ریشه $g \circ f$ است.

$$\Rightarrow \begin{cases} g(f(x)) = 0 \Rightarrow a - 2ax - 1 = 0 \Rightarrow a - 1 = 2ax \Rightarrow \frac{a-1}{2a} = x \\ g(x) = 0 \Rightarrow ax - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{a} \end{cases}$$

چون ریشه $g \circ f$ و g یکسان است، پس داریم:

$$\frac{a-1}{2a} = \frac{1}{a} \xrightarrow{a \neq 0} \frac{a-1}{2} = 1 \Rightarrow a-1 = 2 \Rightarrow a = 3$$

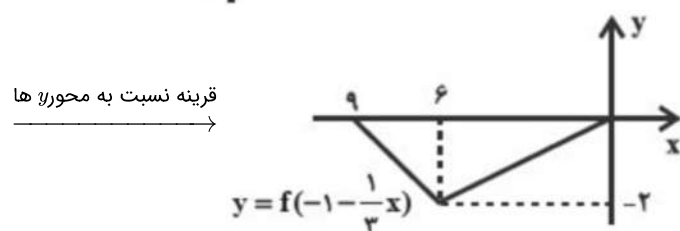
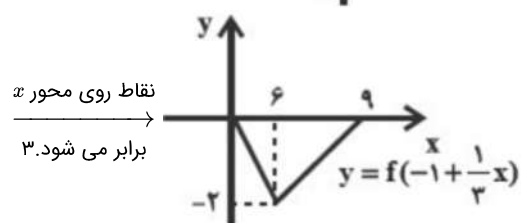
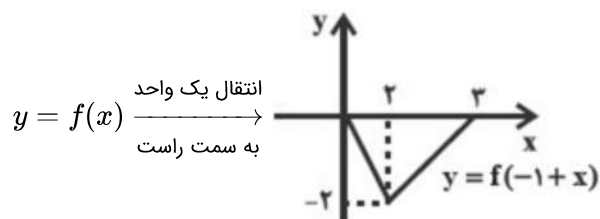
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. $f(g(x))$ یعنی در تابع f به جای x عبارت $g(x)$ را قرار دهیم. چون $f(x) = x+1$ است، ۱۴۱

پس داریم:

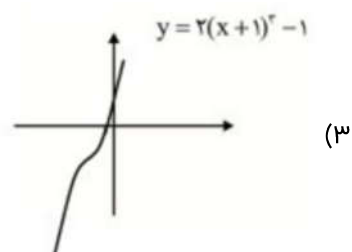
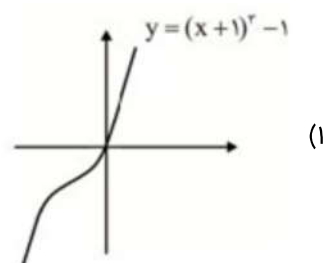
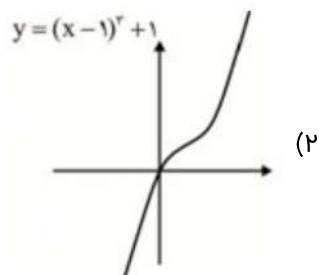
$$f(g(x)) = g(x) + 1$$

$$\underbrace{f(g(x))}_{f(g(x))} = \frac{x}{x^2+1} \Rightarrow g(x) + 1 = \frac{x}{x^2+1}$$

$$g(x) = \frac{x}{x^2+1} - 1 \Rightarrow g(x) = \frac{x - x^2 - 1}{x^2+1}$$



ابتدا عبارت‌ها را به صورت مکعب کامل در می‌آوریم فقط گزینه ۳ این ویژگی را دارد.



گزینه ۴ نزولی بوده و نمی‌تواند جواب باشد.

$$f(x-2) = (x-2+2)^r - 1 = x^r - 1$$

$$f(-x) = (-x+2)^r - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^r + x^r}{(-x)^r + 2x^r} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^r}{x^r} = 2$$

حاصل حد خواسته‌شده را با انتخاب پرتوان‌ها داریم:

$$f(x) = \underbrace{6x^2 - 12x - x^3 + 8 - 8}$$

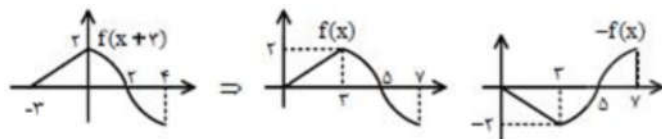
گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۴۵

$$f(x) = (2 - x)^2 - 8 \Rightarrow y + 8 = (2 - x)^2 \Rightarrow 2 - x = \sqrt{y + 8}$$

$$x = 2 - \sqrt{y + 8} \Rightarrow x = 2 + \sqrt{-y - 8} \Rightarrow f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{-x - 8}$$

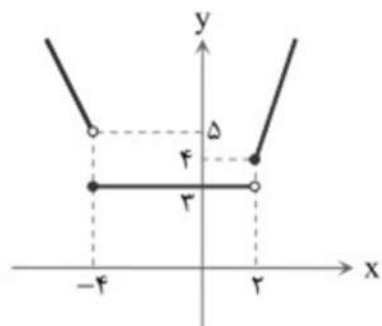
$$\underbrace{m=2 \quad a=-1 \quad b=-8}_{m(a+b)=-18}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۴۶



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۴۷

نمودار تابع را رسم می‌کنیم. از روی نمودار مشخص می‌شود که تابع در بازه‌ی $[1, 7]$ وضعیت صعودی دارد ولی اکیداً صعودی نیست زیرا در بازه‌ی $(1, 2)$ ثابت است.



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. برای اینکه نشان دهیم توابع f و g وارون یکدیگرند، کافی است ثابت کنیم ترکیب دو تابع f و g برابر تابع همانی است. علاوه بر آن دامنه‌ی تابع معکوس، همان برد تابع اصلی خواهد بود و بالعکس. گزینه‌ی «۱»:

$$\text{fog}(x) = f(g(x)) = -\frac{y}{x} g(x) - 3 = -\frac{y}{x} \left(-\frac{yx+6}{y} \right) - 3 = x + 3 - 3 = x$$

$$D_{\text{fog}} = D_g = R$$

$$\text{gof}(x) = g(f(x)) = -\frac{2f(x)+6}{y} = -\frac{-yx-6+6}{y} = x$$

$$D_{\text{gof}} = D_f = R$$

پس توابع f و g معکوس یکدیگرند.

گزینه‌ی «۲»:

$$f(x) = -x^2; x \geq 0 \Rightarrow R_f = (-\infty, 0] \Rightarrow y = -x^2 \Rightarrow x^2 = -y$$

$$\Rightarrow |x| = \sqrt{-y} \xrightarrow{\text{با توجه دامنه}} x = \sqrt{-y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{-x} \Rightarrow D_{f^{-1}} = R_f = (-\infty, 0]$$

گزینه‌ی «۳»:

$$f(x) = x^2 - 2x + 2 \Rightarrow f(x) = x^2 - 2x + 1 + 1 = (x-1)^2 + 1$$

شرط وارون‌پذیری تابع f این است که دامنه‌ی آن را محدود کنیم. برای این منظور باید $x < 1$ یا $x \geq 1$ باشد پس در بازه‌ی $x \geq 0$ تابع f یک‌به‌یک نیست و در نتیجه وارون‌پذیر هم نخواهد بود.

گزینه‌ی «۴»:

$$f(x) = \sqrt{x+3} \Rightarrow y = \sqrt{x+3} \Rightarrow y^2 = x+3 \Rightarrow x = y^2 - 3 \Rightarrow f^{-1}(x) = x^2 - 3$$

ضابطه‌ی وارون تابع f باید به صورت $f^{-1}(x) = x^2 - 3$ باشد. در ضمن دامنه‌ی تابع معکوس (با توجه به دامنه‌ی تابع اصلی) باید به صورت $D_f = [\sqrt{3}, +\infty)$ باشد.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به مفروضات مسئله داریم:

$$g(2x-3) = 8x^2 - 22x + 15 = 2(2x-3)^2 + (2x-3) \Rightarrow g(t) = 2t^2 + t$$

مجموع ضرایب چندجمله‌ای $\text{fog}(x)$ برابر $\text{fog}(1)$ است:

$$\text{fog}(1) = f(3) = 3$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ضابطه‌ی تابع وارون را می‌یابیم. برای این کار باید، x را برحسب y پیدا کنیم:

$$y = \frac{x+m}{x-2} \Rightarrow yx - 2y = x+m \Rightarrow x(y-1) = 2y+m \Rightarrow x = \frac{2y+m}{y-1}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{2x+m}{x-1}$$

طول نقاط تلاقی نمودارهای f و f^{-1} از حل معادله‌ی $f(x) = f^{-1}(x)$ به دست می‌آید. این معادله باید دو ریشه داشته باشد:

$$\frac{x+m}{x-2} = \frac{2x+m}{x-1} \Rightarrow x^2 + mx - x - m = 2x^2 - 4x + mx - 2m \Rightarrow x^2 - 3x - m = 0$$

$$\xrightarrow{\Delta > 0} 9 - 4(1)(-m) > 0 \Rightarrow 4m > -9 \Rightarrow m > -\frac{9}{4}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا ضابطه‌ی تابع جدید را به دست می‌آوریم:

$$y = (x - 1)^2 + 3(x - 1) + 5 - 7 \Rightarrow y = x^2 + x - 4$$

چون نمودار جدید در بازه‌ی $(1, 3)$ زیر تابع خطی $f(x) = ax + b$ قرار دارد، پس $f(x)$ از نقاط $(1, -2)$ و $(3, 8)$ می‌گذرد. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} f(1) = -2 \Rightarrow a + b = -2 \\ f(3) = 8 \Rightarrow 3a + b = 8 \end{cases} \Rightarrow a = 5, b = -7 \Rightarrow f(x) = 5x - 7 \Rightarrow f(2) = 3$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$(g^{-1} \circ f)^{-1}(x) = \frac{1}{x+1} \Rightarrow (f^{-1} \circ g)(x) = \frac{1}{x+1} \Rightarrow f^{-1}(g(x)) = \frac{1}{x+1} \Rightarrow g(x) = f\left(\frac{1}{x+1}\right)$$

حال $f(3)$ را می‌خواهیم، بنابراین داریم:

$$\frac{1}{x+1} = 3 \Rightarrow x+1 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = -\frac{2}{3} \Rightarrow f(3) = g\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{2}{3}+3} = -\frac{2}{7}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. فرض می‌کنیم $\log^{-1}(x)$ محور x ها را به طول m قطع کند، پس:

$$\log^{-1}(m) = 0 \Rightarrow f(g^{-1}(m)) = 0 \xrightarrow{3x-8=0 \Rightarrow x=8/3} g^{-1}(m) = 8/3$$

$$\Rightarrow g(8/3) = m \Rightarrow 8 + \sqrt{8} = m \Rightarrow m = 8 + \sqrt{8}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون $A(-2, a)$ روی $y = f(x)$ است پس $f(-2) = a$ است. نقطه‌ی $A'(5, 4)$ روی

منحنی $y = 1 - f(3 + bx)$ قرار دارد پس $1 - f(3 + 5b) = 4$ یا $-3 = f(3 + 5b)$

$$\begin{cases} f(-2) = a \\ f(3 + 5b) = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 + 5b = -2 \\ -3 = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -1 \\ a = -3 \end{cases} \Rightarrow a + b = -4$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = x^2 + x, g(x) = \sqrt{4x+1} \Rightarrow \text{gof}(x) = \sqrt{4(x^2+x)+1}$$

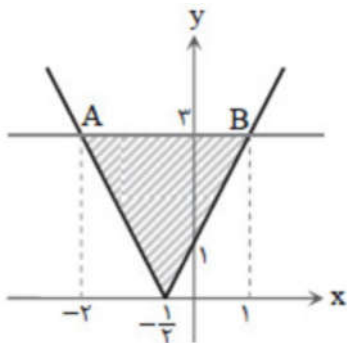
$$\text{gof}(x) = \sqrt{4x^2+4x+1} = \sqrt{(2x+1)^2} = |2x+1|$$

$$\begin{cases} y = 2x+1 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow 2x+1 = 3 \Rightarrow x = 1$$

$$\begin{cases} y = -2x-1 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow -2x-1 = 3 \Rightarrow x = -2$$

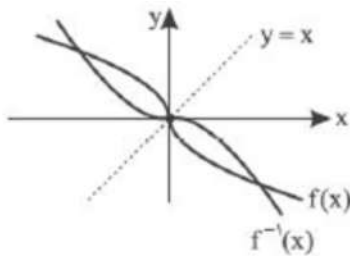
پس طول قاعده‌ی AB از مثلث تشکیل شده برابر $3 - (-2) = 5$ و ارتفاع مثلث نیز برابر ۳ است یعنی مساحت

مثلث هاشورخورده برابر است با:

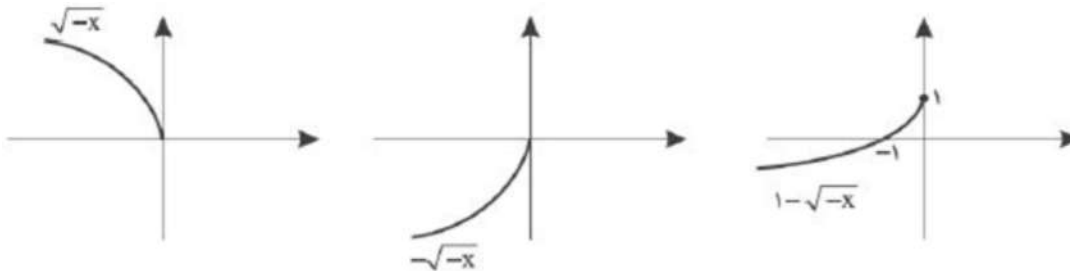


$$S = \frac{3 \times 3}{2} = 9/2$$

برای رسم نمودار وارون $f(x)$ باید آن را نسبت به خط $y = x$ قرینه کنیم. نمودار دو تابع در سه نقطه با هم برخورد می‌کنند. به علاوه می‌توانید از این نکته مهم استفاده کنید که نمودار $f(x)$ شبیه تابع $y = -\sqrt[3]{x}$ است.



دامنه f^{-1} همان برد f است. برای پیدا کردن برد f نمودار آن را رسم می‌کنیم.



مطابق شکل برد تابع $y = 1 - \sqrt{-x}$ برابر $(-\infty, 1]$ است.

$$D_f = [0, 4], R_f = [-2, 2], D_g = [-4, 4], R_g = [-1, 1]$$

با انتقال a واحدی نمودار تابع f به سمت چپ، منقبض کردن دو برابری آن در راستای عمودی و انتقال یک واحد به سمت

بالا، به نمودار $y_1 = \frac{1}{4}f(x+a) + 1$ خواهیم رسید؛ بنابراین داریم:

$$D_{y_1} = [-a, 4-a], R_{y_1} = [0, 2]$$

با منقبض کردن دو برابری g در راستای افقی و سپس انتقال b واحدی نمودار در راستای عمودی به نمودار

$$D_{y_2} = [-2, 2], R_{y_2} = [b-1, b+1] \quad y_2 = g(2x) + b \quad \text{خواهیم رسید، بنابراین داریم:}$$

دامنه‌های y_1 و y_2 را با هم و بردهای آن‌ها را نیز با هم برابر در نظر می‌گیریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} [-a, 4-a] = [-2, 2] \Rightarrow a = 2 \\ [b-1, b+1] = [0, 2] \Rightarrow b = 1 \end{cases} \quad a+b = 3$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا $f\left(\frac{3}{2}\right) + f\left(-\frac{3}{2}\right)$ را حساب کرده، سپس $f(2)$ را کم می‌کنیم:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{3}{2}\right) + f\left(-\frac{3}{2}\right) &= \left(-\left(\frac{3}{2}\right)^2 + a\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} + 2\right) + \left(-\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + a\left(-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3}{2} + 2\right) \\ &= 2a\left(\frac{9}{4}\right) + 4 = \frac{9}{2}a + 4 \end{aligned}$$

$$f(2) = -8 + 4a + 2 + 2 = 4a - 2$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) + f\left(-\frac{3}{2}\right) - f(2) = \left(\frac{9}{2}a + 4\right) - (4a - 2) = \frac{a}{2} + 8 = 5 \Rightarrow a = -6$$

بنابراین:

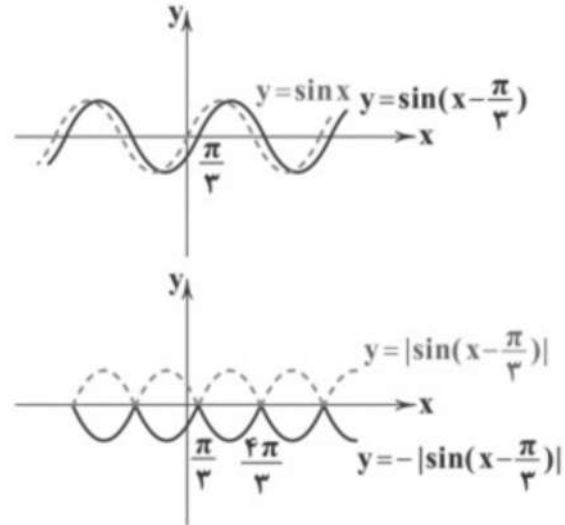
پس:

$$f(x) = -x^2 + (-6x^2) + x + 2 \Rightarrow f(1) + f(2) = (-1 - 6 + 1 + 2) + (-8 - 24 + 2 + 2) = -32$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

با توجه به انتقال‌های نمودار، تابع موردنظر $y = 1 - \left|\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right|$ یا $y = 1 - \left|\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right|$ می‌باشد.

با رسم نمودار درمی‌یابیم که نمودار $y = 1 - \left|\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right|$ به صورت زیر است:



با انتقال نمودار $y = 1 - \left|\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right|$ به اندازه‌ی ۱ واحد به بالا، نمودار داده‌شده به دست می‌آید. پس تابع مربوط

به نمودار، $y = 1 - \left|\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right|$ است.

توجه کنید که نمودار می‌تواند مربوط به تابع $y = 1 - \left|\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right|$ نیز باشد، زیرا:

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + x - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

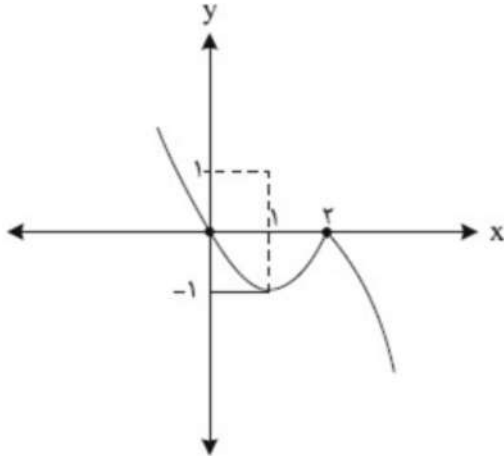
$$\Rightarrow \left|\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right| = \left|\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right| \Rightarrow 1 - \left|\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right| = 1 - \left|\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right|$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به نمودار، از طول نقاط تابع f یک واحد کم شده و سپس تقسیم بر ۲ شده و طول نقاط متناظر آن‌ها روی تابع g به دست آمده است. همچنین عرض نقاط ثابت مانده است، بنابراین:

$$A(x_1, y_1) \Rightarrow A\left(\frac{x_1 - 1}{2}, y_1\right) = A(x, y) \Rightarrow x = \frac{x_1 - 1}{2} \Rightarrow x_1 = 2x + 1, y_1 = y$$

$$\Rightarrow g(x) = f(2x + 1)$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:

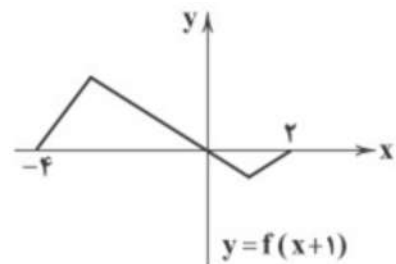


$$f(x) = -x|x-2| = \begin{cases} -x(x-2) & ; x \geq 2 \\ x(x-2) & ; x < 2 \end{cases}$$

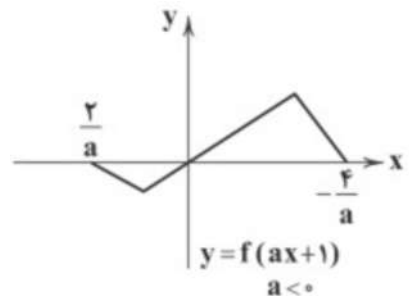
$$= \begin{cases} -x^2 + 2x & ; x \geq 2 \\ x^2 - 2x & ; x < 2 \end{cases}$$

منظور از رابطه‌ی $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ یعنی باید به دنبال بازه‌ای باشیم که تابع f در آن اکیداً صعودی باشد که همان‌طور که از نمودار f مشخص است تابع در بازه‌ی $[1, 2]$ یا هر زیرمجموعه‌ای از آن صعودی اکید است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا نمودار را یک واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار $f(x+1)$ به دست آید.



تابع $f(x+1)$ از نواحی دوم و چهارم عبور می‌کند. برای آن‌که این تابع از نواحی اول و سوم عبور کند، باید x را با مضرب منفی منقبض یا منبسط کنیم، تا تابع نسبت به محور y ها متقارن شود. پس تابع $f(ax+1)$ با شرط $a < 0$ به صورت زیر است.



نتیجه این‌که باید $b = 1$ و $a < 0$ باشد تا تابع $f(ax+b)$ فقط در نواحی اول و سوم قرار گیرد، پس $a+b$ می‌تواند ۰/۹ باشد.

$$g(x) = (x-5)^2 + 5(x-5) + 1 + 4$$

$$\Rightarrow g(x) = x^2 - 10x + 25 + 5x - 25 + 1 + 4 \Rightarrow g(x) = x^2 - 5x + 5$$

تابع $g(x)$ باید پایین نیمساز ربع اول $y = x$ باشد، بنابراین داریم:

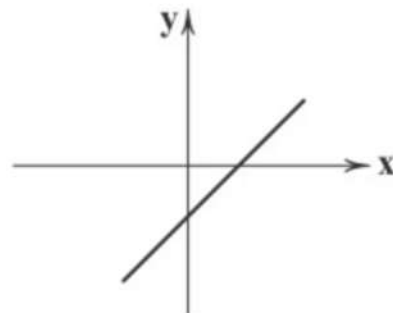
$$g(x) < x \Rightarrow x^2 - 5x + 5 < x \Rightarrow x^2 - 6x + 5 < 0$$

$$\Rightarrow 1 < x < 5 \Rightarrow \text{Max}(b-a) = 5 - 1 = 4$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر شیب خط مثبت باشد آن‌گاه صعودی اکید است. ۱۶۵

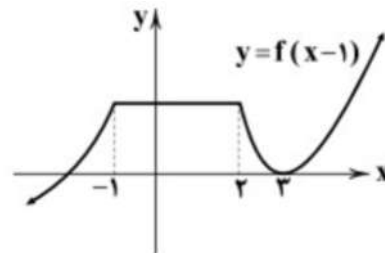
$$\frac{1-a}{4+a} > 0 \Rightarrow -4 < a < 1 \Rightarrow -5 < a-1 < 0$$

عرض از مبدأ منفی و شیب خط مثبت است پس نمودار تقریبی آن به صورت زیر است.



ملاحظه می‌کنید که نمودار آن از ناحیه‌ی دوم نمی‌گذرد.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. نمودار $f(x)$ را یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم تا نمودار $f(x-1)$ به دست آید. ۱۶۶



تابع $f(x-1)$ در بازه‌های $[-\infty, -1]$ و $[3, +\infty)$ صعودی اکید و در بازه‌ی $[-1, 3]$ نزولی است. دقت کنید که پاسخ در گزینه‌ی (۱) زیرمجموعه‌ی جواب اصلی است.

$$g^{-1} = \{(1, 2), (3, 4), (5, 6)\}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا تابع g^{-1} را تشکیل می‌دهیم. ۱۶۷

$$f(g^{-1}(x)) = \{(1, 4), (3, 8), (5, 0)\}$$

$$\frac{h}{f(g^{-1}(x))} = \left\{ \left(1, \frac{2}{4}\right), \left(3, \frac{4}{8}\right) \right\} \Rightarrow \frac{4}{8} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

بنابراین برد تابع فقط یک عضو دارد.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۶۸

$$[x-2] = 3 \Rightarrow 3 \leq x-2 < 4 \Rightarrow 0 \leq x-5 < 1 \Rightarrow |x-5| = x-5$$

$$\Rightarrow f(x) = x-5 + x = 2x-5 \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+5}{2}$$

داریم که $D_f = [5, 6)$ و برد آن $[5, 7)$ خواهد بود، پس دامنه‌ی f^{-1} برابر $[5, 7)$ است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۶۹

تابع f با دامنه $[2, +\infty)$ اکیداً نزولی است. تابع $f\left(\frac{1}{x}\right)$ با دامنه $\left(0, \frac{1}{2}\right]$ اکیداً صعودی و تابع $-f\left(\frac{1}{x}\right)$ با همین دامنه اکیداً نزولی است. گزینه‌های (۱) و (۲) اکیداً صعودی و گزینه (۳) غیریکنواست.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۷۰

با توجه به شکل، دامنه $f(x)$ برابر $[-1, 4]$ است. برای پیدا کردن دامنه $f(\sqrt{x})$ باید $\sqrt{x}$ در فاصله $[-1, 4]$ باشد:
 $-1 \leq \sqrt{x} \leq 4 \Rightarrow \sqrt{x} \leq 4 \Rightarrow 0 \leq x \leq 16$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۷۱

$$f(g(x)) = [g(x)]^2 - 2 = x + 2\sqrt{x+1}$$

$$[g(x)]^2 = x + 2 + 2\sqrt{x+1} = (\sqrt{x+1} + 1)^2 \Rightarrow g(x) = 1 + \sqrt{x+1} \Rightarrow D_g = [-1, +\infty)$$

$$f(x) = x^2 - 2 \Rightarrow D_f = R$$

$$D_{\text{gof}} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in R \mid x^2 - 2 \geq -1\}$$

$$\{x \in R \mid (x \leq -1 \text{ یا } x \geq 1)\} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) = R - (-1, 1)$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۷۲

$$(\sqrt{a^2}, 2b), (|a|, 2) \Rightarrow 2b = 2 \Rightarrow b = 1$$

$$f = \left\{ (1, a-2), (\sqrt{a^2}, 2), (1, 2a), (|a|, 2), (a^2, 4) \right\}$$

$$(1, a-2), (1, 2a) \Rightarrow a-2 = 2a \Rightarrow a = -2$$

$$f = \{(1, -4), (2, 2), (1, -4), (4, 4)\} = \{(1, -4), (2, 2), (4, 4)\}$$

$$g = \{(2a, b), (b^2, 2b), (a+1, -b), (a, b+3)\} = \{(-4, 1), (1, 2), (-1, -1), (-2, 4)\}$$

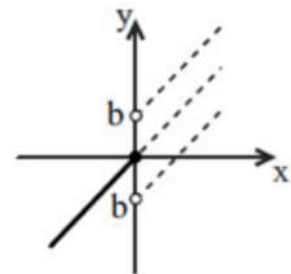
$$\text{fog} = \{(-4, -4), (1, 2), (-2, 4)\}$$

$$R_{\text{fog}} = \{-4, 2, 4\} \Rightarrow -4 + 2 + 4 = 2$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نمودار تابع به صورت زیر است: ۱۷۳

$$y = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ x+b & x > 0 \end{cases}$$

با توجه به نمودار، اگر $b \geq 0$ باشد، آنگاه هر خط موازی محور x ها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع خواهد کرد و تابع یک به یک خواهد بود.



$$f = \{(1, 2), (-2, 3), (-1, 4)\}$$

$$D_{f \circ g} = D_f \cap D_g = \{1, -2, -1\} \cap D_g = \{-2, -1\}$$

با توجه به دامنه بالا عدد ۱ قطعاً در دامنه تابع g نیست:

$$f(-2) - 2g(-2) = -1 \Rightarrow 3 - 2g(-2) = -1 \Rightarrow g(-2) = 2 \Rightarrow (2, -2) \in g^{-1} \quad (1)$$

$$f(-1) - 2g(-1) = 8 \Rightarrow 4 - 2g(-1) = 8 \Rightarrow g(-1) = -2 \Rightarrow (-2, -1) \in g^{-1} \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow f \circ g^{-1}(2) = f(-2) = f(-2) = 3$$

$$(2) \Rightarrow f \circ g^{-1}(-2) = f(-1) = 4$$

$$\text{حاصل ضرب اعضای برد} = 3 \times 4 = 12$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر $f^{-1}(2) = x$ ، آنگاه $f(x) = 2$ ، پس:

$$2 = \frac{9 \times 2^x - (\frac{1}{2})^x}{4} \Rightarrow 9 \times (2^x)^2 - 8 \underbrace{(2^x)}_{t > 0} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 9t^2 - 8t - 1 = 0 \Rightarrow t = 1, -\frac{1}{9} \xrightarrow{t > 0} 2^x = t = 1 \Rightarrow x = 0$$

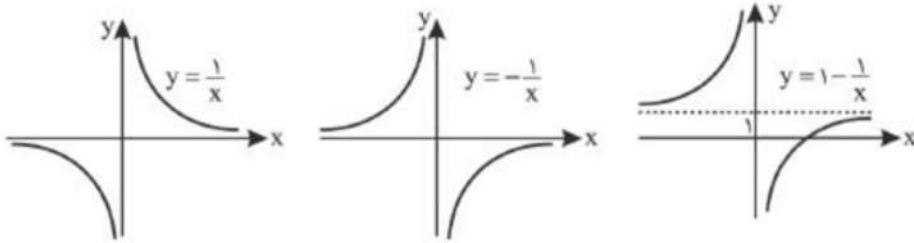
گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$g \circ f(x) = \begin{cases} g(-1) & x < -1 \\ g(x) & -1 \leq x \leq 1 \\ g(1) & x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 & x < -1 \\ 1 - x^2 & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

در تمام نقاط حد دارد.

تابع $f(x) = \frac{x-1}{x}$ یک‌به‌یک است زیرا:

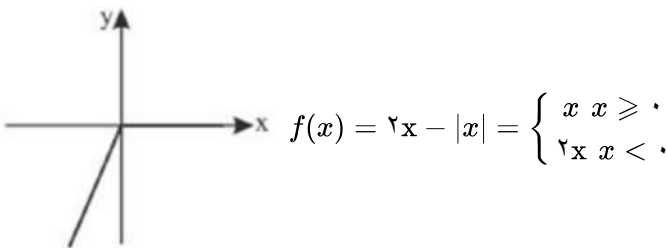
$$f(x) = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x}$$



هر خط موازی محور x ها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

تابع $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ یک‌به‌یک نیست زیرا به ازای $x = -1$ و $x = 1$ مقادیر y برابر $\sqrt{2}$ است.

تابع $f(x) = x - |x|$ یک‌به‌یک نیست زیرا:

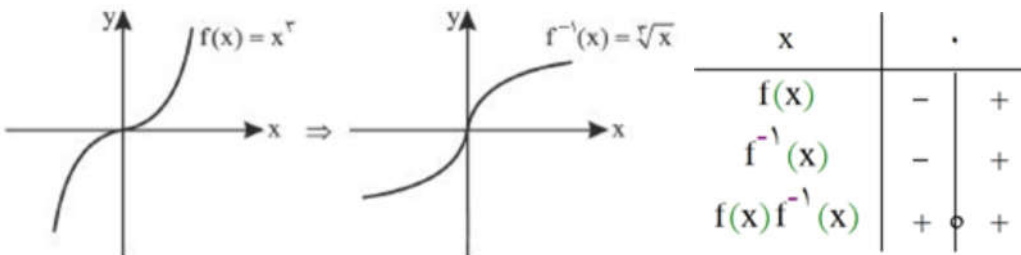


هر خط موازی محور x ها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

تابع $f(x) = [x + [x]]$ یک‌به‌یک نیست زیرا:

$$f(x) = [x + [x]] = [x] + [x] = 2[x]$$

به ازای $x = 0$ و $x = \frac{1}{4}$ مقادیر y برابر صفر است.



$$\begin{aligned}
 y = \sqrt{x} &\Rightarrow y = \sqrt{x+2} \Rightarrow \sqrt{x+2} - 2 \Rightarrow y = |\sqrt{x+2} - 2| \\
 &\Rightarrow \begin{cases} y = |\sqrt{x+2} - 2| \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow |\sqrt{x+2} - 2| = 1 \Rightarrow \sqrt{x+2} - 2 = \pm 1 \\
 &\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+2} = 2 \Rightarrow x+2 = 4 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow \alpha = 2 \\ \sqrt{x+2} = 3 \Rightarrow x+2 = 9 \Rightarrow x = 7 \Rightarrow \beta = 7 \end{cases} \\
 &\Rightarrow \alpha + \beta = 2 + 7 = 9
 \end{aligned}$$

مراحل ساخت تابع $g(x)$:

$$\sqrt{x} \xrightarrow{\text{واحد به چپ ۳}} \sqrt{x+3} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور y ها}} \sqrt{-x+3}$$

$$\xrightarrow{\text{واحد رو به پایین ۲}} g(x) = \sqrt{-x+3} - 2$$

حال تابع وارون $g(x)$ را می‌یابیم:

$$g(x) = \sqrt{-x+3} - 2 \Rightarrow y = \sqrt{-x+3} - 2 \Rightarrow y+2 = \sqrt{-x+3} \\ \Rightarrow (y+2)^2 = -x+3 \Rightarrow x = 3 - (y+2)^2$$

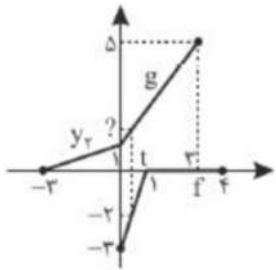
$$\xrightarrow{\text{جای } x \text{ و } y} g^{-1}(x) = 3 - (x+2)^2 = -x^2 - 4x - 1$$

را عوض می‌کنیم

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

با فرض $f^{-1}(-2) = t$ داریم: $f(t) = -2$ مشخص است t عددی بین صفر و یک است. شیب خط مماس در تابع f برابر ۳ و عرض از مبدأ آن برابر ۳- است، پس:

$$f(x) = 3x - 3, \text{ بنابراین:}$$



$$f(t) = -2 \Rightarrow 3t - 3 = -2 \Rightarrow t = \frac{1}{3} \Rightarrow f^{-1}(-2) = \frac{1}{3}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f \circ f = \{(2, 3), (3, -1), (0, 1)\}$$

$$f^2 = \{(1, 1), (2, 0), (3, 1), (0, 9)\}$$

$$y = f \circ f + f^2 = \{(2, 3), (3, 0), (0, 10)\}$$

$$R_y = \{3, 0, 10\} \Rightarrow \text{جمع اعضا} = ۱۳$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f^{-1}(\alpha + f^{-1}(1)) = \frac{5}{4} \Rightarrow \alpha + f^{-1}(1) = f\left(\frac{5}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \alpha + f^{-1}(1) = \frac{5}{4} + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{9}{4}$$

از طرفی $f(1) = 1$ ، پس: $f^{-1}(1) = 1$ ، لذا:

$$\alpha + 1 = \frac{9}{4} \Rightarrow \alpha = \frac{5}{4}$$

به شرطی این دو نمودار بر هم منطبق خواهند شد که $f(x-4) = f(2-x)$ یک اتحاد باشد، با توجه به آن که f یک سهمی است. شرط اتحاد شدن آن این است که محور تقارن سهمی یعنی $x = \frac{-k}{2}$ در شرط $\frac{x-4+2-x}{2} = \frac{-k}{2}$ برقرار باشد، به عبارتی یکی از توابع را نسبت به خط $x = \frac{-k}{2}$ قرینه کنیم، تابع دیگر به دست آید:

$$\frac{-k}{2} = -1 \Rightarrow k = 2$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا باید ضابطه‌ی وارون f را تعیین می‌کنیم:

$$y = \frac{x-1}{3} \Rightarrow x = \frac{y-1}{3} \Rightarrow y-1 = 3x \Rightarrow y = 3x+1 \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=1 \end{cases}$$

تابع $g(x) = x^2 - 4x + 3$ یک سهمی با رأس به طول $x = 2$ است و در بازه‌های $(-\infty, 2]$ و $[2, +\infty)$ یا زیرمجموعه‌هایی از این دو بازه، تابعی یک به یک است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. یک تابع به صورت مجموعه زوج‌های مرتب، هنگامی یک به یک است که در آن زوج‌های مرتب متمایز، مؤلفه‌های دوم مساوی نداشته باشند، یا به عبارتی اگر زوج‌های مرتب، مؤلفه‌های دوم مساوی داشته باشند، مؤلفه‌های اول آن‌ها نیز با هم برابر باشند، بنابراین:

$$(m, 3) = (-1, 3) \Rightarrow m = -1 \Rightarrow f = \{(-2, 2), (-1, 3), (-2, a)\}$$

چون f یک تابع است، باید زوج‌های مرتب $(-2, a)$ و $(-2, 2)$ نیز با یکدیگر برابر باشند، بنابراین:

$$(-2, a) = (-2, 2) \Rightarrow a = 2 \Rightarrow a + m = 2 + (-1) = 1$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

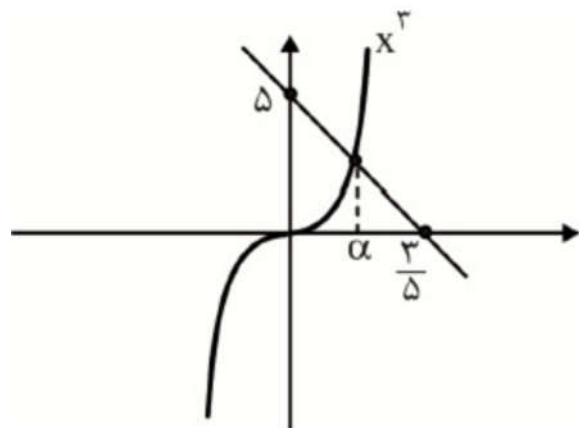
$$f \circ f(x) = 1 - 3f^2(x) \Rightarrow f(f(x)) = 1 - 3f^2(x) \Rightarrow f(x) = 1 - 3x^2$$

$$h(g(x)) = h(x-1) = (x-1)^2 + 2(x-1) + 1 = (x^2 - 2x + 1) + (2x - 2) + 1 = x^2 - 3x^2 + 5x - 2$$

حالا معادله $h(g(x)) = f(x)$ را حل می‌کنیم:

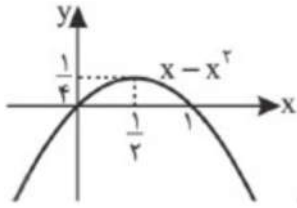
$$x^2 - 3x^2 + 5x - 2 = 1 - 3x^2 \Rightarrow x^2 + 5x - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = -5x + 3$$

برای حل این معادله، به روش هندسی عمل می‌کنیم، نمودارهای دو طرف معادله را رسم کرده و محل تلاقی را پیدا می‌کنیم:



واضح است که α در بازه $(0, \frac{3}{5})$ قرار دارد.

اول حدود تغییرات $f(x) = \sqrt{x - x^2}$ را پیدا می‌کنیم.

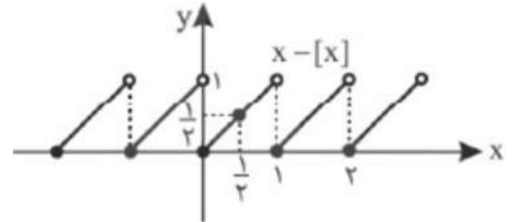


$$x - x^2 \leq \frac{1}{4} \Rightarrow 0 \leq \sqrt{x - x^2} \leq \frac{1}{2}$$

برد تابع $g(f(x)) = f(x) - [f(x)]$ را می‌خواهیم.

مطابق شکل نمودار $g(x) = x - [x]$ را رسم کرده‌ایم.

برد تابع $g(f(x))$ برابر برد تابع $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ است که برابر $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ است.



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. f تابعی اکیداً نزولی است.

$$\begin{aligned} f(f(x)) &< f\left(\left(\frac{1}{2}\right)^x\right) \Rightarrow f(x) > \left(\left(\frac{1}{2}\right)^x\right)^2 \Rightarrow \left(\left(\frac{1}{2}\right)^x + \log_{\frac{1}{5}} x\right)^2 > \left(\left(\frac{1}{2}\right)^x\right)^2 \\ \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x + \log_{\frac{1}{5}} x &> \left(\frac{1}{2}\right)^x \Rightarrow \log_{\frac{1}{5}} x > 0 \Rightarrow 0 < x < 1 \end{aligned}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

اگر وارون fog محور yها در $(0, \alpha)$ قطع کند در این صورت fog از $(\alpha, 0)$ عبور خواهد کرد. ما به دنبال α هستیم.

$$g^{-1}(x) = x^2 + 1 \Rightarrow g(x) = \sqrt{x - 1}$$

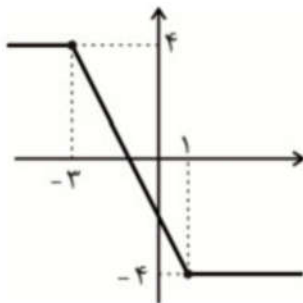
$$\text{fog}(x) = \log \sqrt{x - 1} = 0 \Rightarrow \sqrt{x - 1} = 1 \Rightarrow x - 1 = 1 \Rightarrow x = 2$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f^{-1}(x) = \frac{-x}{2} - 1, D_{f^{-1}} = [-4, 4] = R_F \quad \text{می‌دانیم:}$$

از طرفی چون نمودار f^{-1} یک خط و نزولی اکید است: $R_{f^{-1}} = D_f = [-3, 1]$

بنابراین نمودار $f(x)$ به صورت زیر است (نمودار آبخاری یا z مانند):



$$\Rightarrow f(x) = |x - 1| - |x + 3|$$

$$m = -1 \quad n = 3$$

$$2n - 2m = 2(3) - 2(-1) = 11$$

۱۹۲

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به اینکه n عدد صحیح است، حاصل fog و gof را به طور مجزا محاسبه

می‌کنیم:

$$fog(x) = f(g(x)) = f(x - n[x]) = x - n[x] + n[x - n[x]] = x - n^2[x]$$

$$gof[x] = g(f(x)) = g(x + n[x]) = x + n[x] - n[x + n[x]] = x - n^2[x]$$

پس به ازای هر عدد صحیح n ، fog و gof با هم برابرند و جواب گزینه ۴ است.

۱۹۳

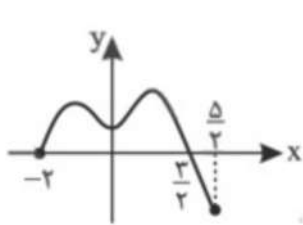
گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\frac{f}{g} = \frac{ax^r + ax + a - 1}{ax^r + bx + c} = x \Rightarrow ax^r + ax + a - 1 = ax^r + bx^r + cx \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = 1 \\ a = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) = x^r + x \\ g(x) = x^r + 1 \end{cases} \Rightarrow f(f(a)) = f(g(1)) = f(2) = 10$$

۱۹۴

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



$$|x - a| f(2x) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} -2 < x < \frac{3}{2} \\ -2 < a < \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$f(2x) \neq 0$$

اگر a در بازه $[-2, \frac{3}{2}]$ نباشد آنگاه دامنه به صورت $\left(-2, \frac{3}{2}\right) \cup \{a\}$ می‌شود.

$$a = -2, -1, 0, 1 \Rightarrow \text{جمع} = -2$$

۱۹۵

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$y = ax - 2f(3x) = ax - 2|6x| = ax - 12|x| = \begin{cases} (a - 12)x & x \geq 0 \\ (a + 12)x & x < 0 \end{cases}$$

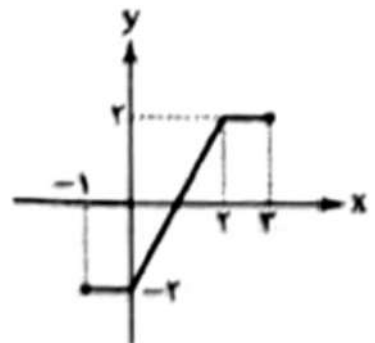
باید شیب هر دو خط هم‌علامت باشند.

$$(a - 12)(a + 12) > 0 \Rightarrow a^2 - 144 > 0 \Rightarrow |a| > 12$$

x	0	2
y	-2	2

۱۹۶

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



این تابع در بازه $[-1, 3]$ صعودی است.

$$D_{\text{gof}} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \left\{x \in R \mid f(x) \in \left\{3, -\frac{1}{4}, -2\sqrt{3}, \frac{1}{4}\right\}\right\}$$

پس $f(x)$ را باید مساوی اعضای دامنه‌ی g قرار دهیم و x های قابل قبول را بیابیم. (توجه داشته باشید که ضابطه‌ی

$f(x)$ برابر x^2 ($x < 1$) یا $-\frac{x}{4}$ ($x \geq 1$) است.)

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3} \Rightarrow x = -\sqrt{3} \text{ (ق ق)} \\ -\frac{x}{4} = 3 \Rightarrow x = -6 \text{ (غ ق ق)} \\ x^2 = -\frac{1}{4} \text{ (غ ق ق)} \\ -\frac{x}{4} = -\frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{4} \text{ (غ ق ق)} \\ x^2 = -2\sqrt{3} \text{ (غ ق ق)} \\ -\frac{x}{4} = -2\sqrt{3} \Rightarrow x = 4\sqrt{3} \text{ (ق ق)} \\ x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{4} \text{ (ق ق)} \\ -\frac{x}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow x = -1 \text{ (غ ق ق)} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow D_{\text{gof}} = \left\{-\sqrt{3}, 4\sqrt{3}, \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\right\}$$

بنابراین حاصل ضرب اعضای دامنه‌ی gof برابر است با: ۶

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. تابع f نزولی اکیدا است.

$$\text{fof}(x) < f(x-1) \Rightarrow f(x) > x-1 \Rightarrow 2 + \sqrt{5-x} > x-1 \Rightarrow \sqrt{5-x} > x-3$$

$$\Rightarrow 5-x > x^2 - 6x + 9 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 < 0 \Rightarrow 1 < x < 4$$

البته دقت کنید اگر $x-3$ منفی باشد (یعنی $x < 3$)، نامعادله همواره برقرار است. پس تمام بازه‌ی $x < 4$ قابل قبول

است. از طرفی شرط دامنه به صورت زیر است:

$$x-1 \in D_f \Rightarrow x-1 \leq 5 \Rightarrow x \leq 6$$

$$f(x) \in D_f \Rightarrow 2 + \sqrt{5-x} \leq 5 \Rightarrow -4 \leq x$$

پس جواب نهایی به صورت $(-4, 4]$ است، که شامل ۸ عدد صحیح است.

$$f(x) = ax + b, f^{-1}(x) = \frac{x - b}{a}$$

$$a(x + 1) + b + 2\left(\frac{x - 2 - b}{a}\right) = 3x \Rightarrow \left(a + \frac{2}{a}\right)x + a + b - \frac{4}{a} - \frac{2b}{a} = 3x$$

$$\Rightarrow a + \frac{2}{a} = 3 \Rightarrow a^2 - 3a + 2 = 0 \Rightarrow a = 1 \text{ یا } a = 2$$

اگر $a = 1$ ، آنگاه $1 + b - 4 - 2b = 0$ که $b = -3$ و $f(x) = x - 3$ و $f^{-1}(x) = x + 3$ ، اما $f(-2) = -5 \neq 2$

در نتیجه این جواب قابل قبول نمی‌باشد.

اگر $a = 2$ ، آنگاه $2 + b - 2 - b = 0$ که b هر عدد حقیقی می‌تواند باشد، یعنی $f(x) = 2x + b$. اکنون قرار می‌دهیم

$f(-2) = 2$ پس $-4 + b = 2$ ، در نتیجه $b = 6$ و $f(x) = 2x + 6$ برای محاسبه $f^{-1}(5)$ کافی است قرار دهیم

$$2x + 6 = 5 \text{ پس } x = -\frac{1}{2} \text{ یعنی } f^{-1}(5) = -\frac{1}{2}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از آنجا که برد دو تابع برابر است پس ضریب پشت $f(x)$ در هر دو تابع برابر است

$$k = 1$$

یعنی:

$$1 = a^2 - 3a + 3 \Rightarrow a^2 - 3a + 2 = 0 \Rightarrow p = 2$$