

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. حل به روش عدد گذاری: فرض می‌کنیم $a = 1$ و $b = -1$ باشد، دراین صورت داریم:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4(a+b) \\ 1 & a+1 & a^2(b+2) \\ 1 & b+1 & b^2(a+2) \end{vmatrix} \xrightarrow[b=-1]{a=1} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 9 = 0$$

تنها گزینه ۱ به ازای $a = 1$ و $b = -1$ صفر می‌شود، لذا گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ -2 & 3 & 4 \\ 9+x & 1+x & 2+x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ -2 & 3 & 4 \\ 9 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 8 \Rightarrow \begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ -2 & 3 & 4 \\ x & x & x \end{vmatrix} = 8 \Rightarrow x = -2$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+a' & b+b' & c+c' \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

توجه:

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$X = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$X^{-1} = \frac{1}{4-9} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}, |A| \neq 0$$

توجه:

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T \text{ فقط}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. چون سطر اول ستون اول هر چهار گزینه با هم متفاوت است کافی است فقط سطر اول ستون اول را ببایم وگرنه راه حل کلی:

$$2A - 3B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 15 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -17 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$(2A - 3B) \cdot C = \begin{bmatrix} -4 & -17 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -25 & -38 \\ 15 & 18 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$A^T = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^T = A^T \times A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$$

$$A^T = -I \xrightarrow{\text{به توان ۳۳}} A^{99} = -I \xrightarrow{\times A^T} A^{101} = -A^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها} = -1 + 1 + 1 + 1 = 1$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۷

$$A^T = A \times A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^{16} = (A^T)^8 = \begin{bmatrix} 4^8 & 0 \\ 0 & 4^8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^{16} & 0 \\ 0 & 2^{16} \end{bmatrix} = 2^{16} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۸

$$|A| = (m+1)(m-1) - (m-4)(m+5) = 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 1 - (m^2 + m - 20) = 0 \Rightarrow -m + 19 = 0 \Rightarrow m = 19$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۹

$$\begin{cases} A+B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\times 2} 2A + 2B = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \\ 2A - 2B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \end{cases} \xrightarrow{+} 4A = \begin{bmatrix} 11 & -5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\div 4} A = \begin{bmatrix} \frac{11}{4} & -\frac{5}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{درایه‌ی سطر اول و ستون دوم} = -1$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا تبدیل یافته خط را به دست می‌آوریم. ۱۰

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2y \\ mx \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2y = x' \\ mx = y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{x'}{2} \\ x = \frac{y'}{m} \end{cases} \Rightarrow \frac{2y'}{m} + \frac{x'}{2} = 5$$

شیب خط تصویر برابر $-\frac{m}{4}$ و شیب خط اولیه ۲ می‌باشد حاصل ضرب این دو شیب باید -۱ باشد.

$$-\frac{m}{4} \times 2 = -1 \Rightarrow m = 2$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۱

$$B = A^{-1}(AB) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. گزینه ۳ تنها دترمینان (-۱۴) دارد. ۱۲

$$|AB| = |A||B| \Rightarrow |AB| = |BA| = -14$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. بنا به تعریف ضرب ماتریس‌ها داریم: ۱۳

$$2(2-x) + 3(x-1) + 5(1+x) = -2 \Rightarrow 4 - 2x + 3x - 3 + 5 + 5x = -2 \Rightarrow 6x = -8 \Rightarrow x = -\frac{4}{3}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۴

$$A \times A^{-1} = I \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3+b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow -3+b = 0 \Rightarrow b = 3$$

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \times A = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^5 = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{مجموع درایه ها}} 20$$

$$2A - B = I \Rightarrow B = 2A - I \Rightarrow B^2 = 4A^2 - 4AI + I^2 \xrightarrow{A^2=A} B^2 = I$$

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. دترمینان ماتریس‌های قطری، پایین مثلثی و بالا مثلثی (از مرتبه‌ی ۳) برابر است با حاصل ضرب درایه‌های روی قطر اصلی.

هم‌چنین اگر در یک ماتریس مربعی از مرتبه‌ی ۳، درایه‌های زیر قطر فرعی (قطری فرعی ماتریس $A_{3 \times 3}$ ، شامل درایه‌های a_{13} ، a_{22} ، a_{31} است.) یا درایه‌های بالای قطر فرعی همگی برابر صفر بودند، آنگاه دترمینان این ماتریس برابر است با منفی حاصل ضرب درایه‌های روی قطر فرعی.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} |A| \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = |6I|$$

پس:

$$\Rightarrow (1 \times (-2) \times 6) |A| (- (2 \times (-3) \times 1)) = 6^3 \Rightarrow (-12) |A| (6) = 216 \Rightarrow |A| = -3$$

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. ضرب دو ماتریس برابر ۱ شده است، بنابراین دو ماتریس معکوس یکدیگرند، پس خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = -\frac{1}{10} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow a = -0/3, c = 0/4 \Rightarrow a + c = 0/1$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \text{ توجه:}$$

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A \times A^2 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^3 = I$$

$$A^{20} = A^{18} \times A^2 = (A^3)^6 \times A^2 = I^6 \times A^2 = I \times A^2 \Rightarrow A^{20} = A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

تذکر: توان‌های یک ماتریس مربعی خاصیت جابه‌جایی دارند.

$$A^r \times A^s = A^s \times A^r = A^r \times A^t = A^t \times A^r$$

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به این‌که $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ و $|A| = 3 \times 3 - 3 \times 4 \neq 0$ ، پس A وارون‌پذیر است و

طرفین معادله‌ی $AX = B - 2I$ را می‌توانیم از چپ در A^{-1} ضرب کنیم، داریم:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B - 2A^{-1}I \xrightarrow{A^{-1}A=I} X = A^{-1}B - 2A^{-1} \quad (*)$$

اما توجه کنید که $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$ ، پس با جای‌گذاری در $(*)$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} X &= \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 19 & -2 \\ -27 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -8 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 2 \\ -19 & -3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 18 \end{bmatrix}$$

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -x & 2x \\ x & 4x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 18 \end{bmatrix} \\ \rightarrow \begin{cases} -x + y = 3 \\ 2x = 6 \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 6 \end{cases} \rightarrow x - y = -3 \end{aligned}$$

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$|B| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 3 & 3 \\ b & c & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ b & c & a \end{vmatrix}$$

چون درایه‌های سطر دوم در دترمینان دومی، مضربی از درایه‌های سطر اول آن هستند، پس مقدار این دترمینان مساوی صفر است و در سطر دوم دترمینان اولی از عدد ۳ فاکتور می‌گیریم:

$$|B| = 3 \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ b & c & a \end{vmatrix} = 3|A|$$

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. ماتریس $A - B = [m_{ij}]_{3 \times 3}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$m_{ij} = \begin{cases} j - i - i - j : i < j \\ j - i - i + j : i = j \\ j + i - i + j : i > j \end{cases} \Rightarrow m_{ij} = \begin{cases} -2i & : i < j \\ 2j - 2i : i = j \\ 2j & : i > j \end{cases}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & -4 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (A - B)^t = -(A - B)$$

بنابراین ماتریس $A - B$ ، یک ماتریس پادمتقارن است.

$$B = I_n - A \Rightarrow A + B = I_n$$

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$A^T + AB + B = A(A + B) + B = AI_n + B = A + B = I_n$$

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. ۲۵

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2a \\ 3 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 3 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 5 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2a-a \\ 3 & -1 & 5-5 \\ -2 & 1 & 4-4 \end{vmatrix} = 5 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 5$$

$$\Rightarrow a \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \Rightarrow a = 5$$

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. با ضرب A^{-1} در رابطه‌ی $A^T = A$ داریم: ۲۶

$$A^{-1} A^T = A^{-1} A \Rightarrow I A^T = I \Rightarrow A^T = I \Rightarrow A^T + A^T = I + I = I + I = 2I$$

با توجه به $(rA)^{-1} = \frac{1}{r} A^{-1}$ ($r \neq 0$) وارون $2I$ برابر $\frac{1}{2} I^{-1}$ است، از آنجایی که $I^{-1} = I$ است پس جواب $\frac{1}{2} I$ خواهد بود.

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. ۲۷

$$A^2 = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ 2^2 & 2^2 \end{bmatrix} \rightarrow A^3 = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ 2^3 & 2^3 \end{bmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow A^{10} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ 2^{10} & 2^{10} \end{bmatrix}$$

$$A^{10} \text{ های } 2^{10} + 2^{10} = 2 \times 2^{10} = 2^{11}$$

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. دترمینان را حول سطر سوم بسط ۲۸

$$\begin{vmatrix} a & a & a \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a(3a - 2a) = a^2$$

می‌دهیم:

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. ۲۹

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow |A^{-1}| = 1 \times 4 - 2 \times 3 = -2 \Rightarrow |A|^{-1} = -2 \Rightarrow \frac{1}{|A|} = -2 \Rightarrow |A| = -\frac{1}{2}$$

توجه کنید که $|A^{-1}| = |A|^{-1}$ است.

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. ۳۰

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = -1(4 - 6) = 2$$

$$\Rightarrow |A^T B^T| = |A|^T |B|^T = 8$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow |B| = 1(-1) = -1$$

$$\frac{1}{2} A = \begin{bmatrix} \frac{2}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{دترمینان} = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2} = 2.5$$

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. ۳۱

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

توجه:

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. روش اول: با قرار دادن $a = -1$ ، داریم:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1(2 \times 2 - 1 \times 3) - 0 + 1(1 \times 1 - 2 \times 0) = -1 + 1 = 0$$

تنها گزینه‌ی (۳) می‌تواند پاسخ باشد.

$$\begin{vmatrix} a & a+1 & a+2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{از ستون سوم}]{\text{کم کردن ستون دوم}} \begin{vmatrix} a & a+1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{از ستون دوم}]{\text{کم کردن ستون اول}} \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

با توجه به این که دو ستون برابرند، در نتیجه حاصل دترمینان صفر می‌شود.

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$A^{-1} = A \Rightarrow AA^{-1} = A^T \Rightarrow A^T = I \Rightarrow \begin{bmatrix} a & 1 \\ -1 & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 1 \\ -1 & -a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 - 1 & 0 \\ 0 & a^2 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow a^2 - 1 = 1 \Rightarrow a = \pm\sqrt{2}$$

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$B \times A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & -9 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = C$$

$$\Rightarrow (B \times A)^{-1} = C^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & -9 \\ 0 & -10 \end{vmatrix}} \times \begin{bmatrix} 1 & +9 \\ 0 & -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1 & -0.9 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^T + A - I = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -I$$

$$2m = 3 - m \Rightarrow m = 1$$

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$1 + n = -n \Rightarrow n = -\frac{1}{2}$$

$$m - n = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ -3 & -6 \end{bmatrix} \Rightarrow 2A + B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

جمع درایه‌ها = ۲۰

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا درایه‌های ماتریس A را به دست می‌آوریم.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A^T - 4A = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = 5I$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -10 \\ -25 & 19 \end{bmatrix}$$

$$B^T = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$$

$${}^T AB = 2 \times \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -8 \\ -2 & 28 \end{bmatrix}$$

$$+ \frac{A^T + {}^T AB + B^T = \begin{bmatrix} 2 & -18 \\ -27 & 39 \end{bmatrix}}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$AX = C \Rightarrow X = A^{-1} \cdot C \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ m \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 - 3m \\ 5m \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4 = -4 - 3m \Rightarrow m = \frac{-8}{3} \\ y = 5m \Rightarrow y = \frac{-40}{3} \end{cases}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ماتریس مفروض را فقط در ستون دوم مشخص می‌کنیم که در آن i شماره‌ی سطر و

$$[i^T + 3j]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \\ 15 \end{bmatrix}_{i^T} \Rightarrow 7 + 10 + 15 = 32$$

ستون دوم

$j = 2$ شماره‌ی ستون است.

$$x = -b - c \text{ و } y = -a - c, z = -a - b$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

اگر در نظر بگیریم:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$$

که مطابق دترمینان و اندرموند مقدار آن برابر است با: $(y - x)(z - x)(z - y)$

بنابراین خواهیم داشت:

$$(-(b + c) + (a + c))(-(a + c) + (a + b))(-(a + b) + (b + c)) = (a - b)(b - c)(c - a)$$

$$A^r = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^r = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

پس به صورت استقرایی می‌توان حدس زد:

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & n & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین: $A^{91} = \begin{bmatrix} 1 & 91 & 91 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ و مجموع درایه‌ها برابر است با:

$$1 + 91 + 91 + 1 + 1 = 185$$

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. از روش کرامر استفاده می‌کنیم: ۴۴

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & a \\ 1 & b \end{vmatrix}} = \frac{7}{2b - a} \Rightarrow 1 = \frac{7}{2b - a} \Rightarrow 2b - a = 7$$

راه حل دوم:

$$y = 1 \Rightarrow \begin{cases} 2x + a = 3 \\ x + b = 5 \end{cases}$$

معادله‌ی اول را از دو برابر معادله‌ی دوم کم می‌کنیم:

$$2(x + b - 5) - (2x + a - 3) = 0 \Rightarrow 2b - a - 10 + 3 = 0 \Rightarrow 2b - a = 7$$

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. حاصل دترمینان را با بسط حول سطر اول به دست می‌آوریم: ۴۵

$$x \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2x - 3y + 1 = 0 \Rightarrow 2x + 3y = 1$$

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) \Rightarrow 2\left(\frac{1}{2}\right) + 3(0) = 1$$

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. ۴۶

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 5 & -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \square \end{bmatrix}$$

برای یافتن درایه‌های سطر دوم و ستون سوم ماتریس C، باید سطر دوم A در ستون سوم B ضرب شود:

$$\text{جواب} = 3 \times (-6) + 0 \times 0 = -18$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۴۷

$$|3A^{-1}| = 1 \Rightarrow 3^2 |A^{-1}| = 1 \Rightarrow 9 \left(\frac{1}{|A|}\right) = 1 \Rightarrow |A| = 9$$

$$\Rightarrow 2a - 4(-3) = 9 \Rightarrow 2a = -3 \Rightarrow a = -1/5$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. از رابطه ماتریسی داریم:

۴۸

$$A^T X = 49I \Rightarrow X = 49(A^T)^{-1}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow |A^T| = 49$$

$$X = \begin{bmatrix} 31 & -18 \\ -30 & 19 \end{bmatrix} \text{ پس}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به این که ماتریس A یک ماتریس 2×3 می باشد، داریم:

۴۹

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \xrightarrow{a_{ij}=i-j} A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا ماتریس AB را محاسبه می کنیم:

۵۰

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

حالا وارون ماتریس AB را به دست می آوریم:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |AB| = 2 - 0 = 2$$

$$\Rightarrow (AB)^{-1} = \frac{1}{2} \times \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ماتریس مجهولات از ضرب معکوس ماتریس ضرایب در ماتریس مقادیر به دست می آید.

۵۱

بنابراین:

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow x + y = 4$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از قاعده ی تفکیک استفاده می کنیم.

۵۲

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 0 & a-1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 0 & a & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}}_A + \underbrace{\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}}_{-11} = A - 11$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نکته: اگر در ماتریسی 3×3 مانند A، حاصل ضرب درایه های یک سطر (ستون) در یک عدد

۵۳

ثابت را به سطر (ستون) دیگری بیفزاییم تا ماتریس جدید حاصل شود، آن گاه دترمینان ماتریس جدید با دترمینان ماتریس A برابر است.

نکته: دترمینان ماتریس بالامثلثی (پایین مثلثی) برابر حاصل ضرب درایه های روی قطر اصلی آن است.

با استفاده از نکات بالا داریم:

$$\begin{vmatrix} n & n-9 & n-6 \\ n & n & n+1 \\ n & n & n \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{R_3 - R_2 \rightarrow R_3 \\ R_2 - R_1 \rightarrow R_2}} \begin{vmatrix} n & n-9 & n-6 \\ 0 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -9n \quad \text{طبق فرض} \quad 18 \Rightarrow n = -2$$

۵۴

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر $XA = I$ (ماتریس واحد)، آن گاه X وارون ماتریس A است. بنابراین:

$$X = A^{-1}, A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 6 - 5 = 1 \Rightarrow X = A^{-1} = \frac{1}{6-5} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

۵۵

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} A \times B &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \\ B \times A &= \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow (A \times B) - (B \times A) &= \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow a + b + c + d = -3 + 1 + 1 + 3 = 2 \end{aligned}$$

۵۶

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} |A| &= -14 + 12 = -2 \\ A^{-1} &= \frac{1}{-2} \times \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ -2 & -\frac{7}{2} \end{bmatrix} \\ {}^2A^{-1} &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -7 \end{bmatrix} \\ B.({}^2A^{-1}) &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -15 \\ -14 & -25 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

۵۷

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. نکته: اگر ماتریس‌های A و B معکوس یکدیگر باشند، داریم: $AB = BA = I$

با استفاده از نکته‌ی بالا داریم:

$$\begin{aligned} A(A - 4I) &= I \Rightarrow \begin{bmatrix} a & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a-4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a(a-4) + 4 & 2a-2 \\ 2(a-4) + 6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{cases} a^2 - 4a + 4 = 1 \Rightarrow a = 1 \text{ یا } 3 \\ 2a - 2 = 0 \Rightarrow a = 1 \\ 2a - 2 = 0 \Rightarrow a = 1 \end{cases} \xrightarrow{\cap} a = 1 \end{aligned}$$

۵۸

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x & 1 & 5 \\ x & x & 2 \\ x & x & x \end{vmatrix} &\xrightarrow{R_2 - R_1 \rightarrow R_2} \begin{vmatrix} x & 1 & 5 \\ x & x & 2 \\ 0 & x & x-2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{بسط نسبت به سطر سوم}} (x-2) \begin{vmatrix} x & 1 \\ x & x \end{vmatrix} \\ &= (x-2)(x^2 - x) \xrightarrow{\text{طبق فرض}} 0 \Rightarrow x = 2, x = 1, x = 0 \end{aligned}$$

بنابراین مجموع ریشه‌ها برابر است: $0 + 1 + 2 = 3$

۵۹

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} A - aI &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-a & 1 \\ 4 & 5-a \end{bmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2-a & 1 \\ 4 & 5-a \end{vmatrix} &= 0 \Rightarrow a^2 - 7a + 6 = 0 \Rightarrow (a-1)(a-6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = 6 \end{cases} \end{aligned}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۶۰

$$A^{\gamma} = A + I \xrightarrow{\text{طرفین را در } A \text{ ضرب می کنیم}} A^{\gamma} = A^{\gamma} + A \Rightarrow A^{\gamma} = (A + I) + A$$

$$A^{\gamma} = 2A + I \xrightarrow{\text{طرفین را در } A \text{ ضرب می کنیم}} A^{\delta} = 2A^{\gamma} + A \Rightarrow A^{\delta} = 2(A + I) + A$$

$$A^{\delta} = 3A + 2I \xrightarrow{\text{طرفین را در } A \text{ ضرب می کنیم}} A^{\delta} = 3A^{\gamma} + 2A$$

$$\Rightarrow A^{\delta} = 3(A + I) + 2A \Rightarrow A^{\delta} = 5A + 3I$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. دو برابر سطر دوم را از سطر اول کم می‌کنیم و سطر دوم را به سطر سوم اضافه ۶۱

می‌کنیم، نتیجه را بر روی سطر سوم بسط می‌دهیم:

$$\begin{vmatrix} 0 & -x^{\gamma} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & x^{\gamma} \end{vmatrix} = x^{\gamma} \begin{vmatrix} 0 & -x^{\gamma} \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

پس حاصل $x^{\gamma}(x^{\gamma}) = x^{\delta}$ است.

راه حل دوم: با انتخاب $x = 2$ حاصل دترمینان برابر ۱۶ و گزینه (۱) نیز برابر ۱۶ می‌شود، پس گزینه (۱) درست است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۶۲

$$(A + I)(A - 3I) = 0 \Rightarrow A^{\gamma} - 2A - 3I = 0 \xrightarrow{\times A^{-1}} A - 2I - 3A^{-1} = 0 \Rightarrow 3A^{-1} + 2I = A$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۶۳

$$AA^{-1} = I, |I| = 1, |KA_{\gamma \times \gamma}| = K^{\gamma} |A|$$

$$|(3A)(4A^{-1})| = |12I| = 12^{\gamma} |I| = 144 \times 1 = 144$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۶۴

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 100 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{\gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 100 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 100 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 100 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{\gamma} = A$$

بنابراین به ازای هر $n \in N$ داریم: $A^n = A$ در نتیجه:

$$A^{100} = A = \begin{bmatrix} 1 & 100 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های ماتریس A^{100} برابر است با: $1 + 100 = 101$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۶۵

$$\begin{vmatrix} y & 28 & 12 \\ z & 4 & 2+7z \end{vmatrix} \xrightarrow{c_2 - 7c_1} \begin{vmatrix} y & 28 & 12 \\ z & 4 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_2 - 7c_1} \begin{vmatrix} y & 28 & 12 \\ z & 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} y & 14 & 6 \\ z & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

چون دو ستون این دترمینان برابر است، پس حاصل آن برابر صفر است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نکته: اگر A یک ماتریس $n \times n$ و k عددی حقیقی باشد، داریم: $|kA| = k^n |A|$

نکته: اگر m عددی طبیعی باشد، داریم: $|A^m| = |A|^m$

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 5 & -1 & 6 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{لا}} (-1) \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -8$$

بسط نسبت به ستون دوم

$$\left| \frac{1}{2} A^2 \right| = \left(\frac{1}{2} \right)^2 |A^2| = \frac{1}{4} |A|^2 = \frac{1}{4} (-8)^2 = -64$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. دستگاه دو معادله و دو مجهول، به دنبال محل برخورد دو خط است و در صورتی فاقد جواب است که دو خط موازی و غیرمنطبق باشند.

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \xrightarrow{\text{فاقد جواب}} \frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$$

$$\frac{m-1}{3} = \frac{4}{m+3} \Rightarrow m^2 + 2m - 15 = 0$$

$$\Rightarrow (m+5)(m-3) = 0 \Rightarrow m = -5, m = 3$$

با بررسی شرط $\frac{m-1}{3} \neq \frac{4}{9}$ فقط $m = -5$ قابل قبول است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

نکته: اگر همه درایه‌های یک سطر (ستون) ماتریس مربعی A را در عدد حقیقی λ ضرب کنیم، آنگاه ماتریس جدیدی حاصل می‌شود که دترمینان آن λ برابر دترمینان ماتریس A است.
نکته (قانون تفکیک در دترمینان):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} + c_{31} & b_{32} + c_{32} & b_{33} + c_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x & -3x & 2 \\ 0 & 2x & 1 \\ 1 & x & 1 \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} x & -3x & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & -3x & 2 \\ 0 & 2x & 1 \\ 1 & x & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & -3x & 2 \\ 0 & 2x & 1 \\ -1 & -x & 0 \end{vmatrix} = 8$$

طبق عکس قانون تفکیک در دترمینان، حاصل جمع دو دترمینان بالا برابر است با:

$$\begin{vmatrix} x & -3x & 2 \\ 0 & 2x & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 8 \Rightarrow 2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 22 \end{bmatrix}$$

مجموع = ۴۴

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ماتریس موردنظر، قطری است. ۷۰

$$A = \begin{bmatrix} a+b & \cdot & \cdot \\ \cdot & 2(a+b) & \cdot \\ \cdot & \cdot & 3(a+b) \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌ها را برابر ۱۲ قرار می‌دهیم:

$$(a+b) + 2(a+b) + 3(a+b) = 12 \Rightarrow a+b = 2$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & \cdot \\ \cdot & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{حاصل ضرب درایه‌های قطر اصلی} = 2 \times 2 = 4$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ضرب داده شده را محاسبه می‌کنیم: ۷۱

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8x+1 \\ y & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16-4y & 2x+10 \\ 48+4y & 6x-2 \end{bmatrix}$$

چون ماتریس قطری است، پس:

$$\begin{cases} 48+4y = 0 \Rightarrow y = -12 \\ 2x+10 = 0 \Rightarrow x = -5 \end{cases} \Rightarrow (y, x) = (-12, -5)$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به ماتریس ضرایب دستگاه، $a=3$, $b=-1$, $a'=2$ و $b'=1$ است و در نتیجه ۷۲

دستگاه به صورت زیر تبدیل می‌شود.

$$\begin{cases} 3x-y=2 \\ 2x+y=2 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{4}{5}, y = 2 - \frac{4}{5} = \frac{2}{5}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. دترمینان‌ها را بسط می‌دهیم: ۷۳

$$1(6-5x^2) - 2(4-3x^2) + x(10-9) = 6+4$$

$$6-5x^2-8+6x^2+x=10 \Rightarrow x^2+x-12=0 \Rightarrow x_1+x_2=-1$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۷۴

$$\left. \begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 0 \\ B &= \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow |B| = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow |AB| = |A||B| = 0$$

$$\begin{vmatrix} |A|+1 & 3 \\ |AB| & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. چون A یک ماتریس 2×2 است، پس: ۷۵

$$\frac{|A||A|}{|A|} - |2A| + 4 = 0 \Rightarrow \frac{|A|^2|A|}{|A|} - 4|A| + 4 = 0 \xrightarrow{|A| \neq 0} |A|^2 - 4|A| + 4 = 0$$

$$\Rightarrow (|A|-2)^2 = 0 \Rightarrow |A| = 2$$

$$|3A| = 3^2 |A| = 9 \times 2 = 18$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \end{bmatrix} = 1(-\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) = -1$$

$$\begin{aligned} CA = B + C &\Rightarrow CA - C = B \Rightarrow C(A - I) = B \Rightarrow C = B(A - I)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \times (-1) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow |C| = -4 + 2 = -2 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} A + B + C = \bar{O} &\Rightarrow C = -A - B = \begin{bmatrix} -2-0 & -3+1 & -4+2 \\ -3-1 & -4-0 & -5+1 \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow C = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -4 & -4 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{مجموع درایه ها} = -18 \end{aligned}$$

نکته: اگر A ماتریسی مربعی باشد، توان‌های A را به صورت

$$A^n = a^{n-1} \times A \text{ و } \dots A^2 = A^1 \times A, A^1 = A \times A$$

نکته: اگر ماتریس‌های A و B تعویض‌پذیر باشند (AB = BA)، آنگاه همه‌ی اتحادهای جبری برای آن‌ها برقرار است.

نکته: ماتریس همانی I با هر ماتریسی تعویض‌پذیر است. (AI = IA)

ابتدا ماتریس A^T را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} A^T &= \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \sin^4 \alpha \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) & \sin \alpha \cos \alpha (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \\ \sin \alpha \cos \alpha (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) & \sin^2 \alpha (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \end{aligned}$$

بنابراین A^T = A اکنون داریم:

$$\begin{aligned} (I - A)^T &= I^T + A^T - 2A = I + A - 2A = I - A \Rightarrow (I - A)^T = (I - A)^T = I - A \\ &\Rightarrow (I - A)^2 = (I - A)^T = I - A \\ &\Rightarrow \dots \Rightarrow (I - A)^{100} = I - A \end{aligned}$$

نکته: ماتریس اسکالر، یک ماتریس قطری است که تمام درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابر است.
نکته: برای جمع کردن دو ماتریس هم‌مرتبه، باید درایه‌های متناظر را در دو ماتریس نظیر به نظیر با هم جمع کنیم.
ابتدا $A + B$ را به دست می‌آوریم:

$$A + B = \begin{bmatrix} a-2 & 3b+b-2 \\ 2c-c+4 & 1+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-2 & 4b-2 \\ c+4 & 4 \end{bmatrix}$$

طبق فرض این ماتریس، ماتریسی اسکالر است. پس:

$$4b-2=0 \Rightarrow b=\frac{1}{2}$$

$$c+4=0 \Rightarrow c=-4$$

$$a-2=4 \Rightarrow a=6$$

$$a+2b-c=6+2 \times \frac{1}{2} - (-4) = 6+1+4=11 \quad \text{بنابراین:}$$

طبق فرض ماتریس $A = [3i - 5j - iz]_{p \times q}$ ، باید درایه‌ی سطر p ام و ستون q ام برابر صفر باشد، پس:

$$3p - 5q - pq = 0 \Rightarrow p(3 - q) = 5q \Rightarrow p = \frac{5q}{3 - q}$$

چون $p > 0$ ، پس باید $3 - q > 0$ ، بنابراین $q < 3$ ، از طرفی $q \geq 1$ ، پس دو حالت امکان‌پذیر است:

$$\begin{cases} q=1 \Rightarrow p = \frac{5}{3-1} = \frac{5}{2} \text{ غیر قابل قبول} \\ q=2 \Rightarrow p = \frac{10}{3-2} = 10 \end{cases}$$

بنابراین A یک ماتریس با ۱۰ سطر و ۲ ستون است. پس دارای $10 \times 2 = 20$ درایه است.

$$\frac{m}{4} = \frac{-3}{m-8} = \frac{5}{3m+4} \Rightarrow m^2 - 8m + 12 = 0 \Rightarrow m = 4, 2$$

فقط به ازای $m = 2$ هر سه نسبت برابرند.

نکته: دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ برابر است با: $ad - bc$

طبق فرض $A = A^{-1}$ ، پس:

$$A^T = AA^{-1} = I \Rightarrow \begin{bmatrix} m & 1 \\ -1 & -m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 1 \\ -1 & -m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} m^2 - 1 & 0 \\ 0 & m^2 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow m^2 - 1 = 1 \Rightarrow m^2 = 2$$

$$|A| = -m^2 + 1 = -2 + 1 = -1 \quad \text{بنابراین:}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر ماتریس A را به صورت $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ فرض کنیم، آن‌گاه: $|A| = ad - bc$ ۸۴

ماتریس B به صورت $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ خواهد شد و داریم: $|B| = ad - bc$

اگر دترمینان AB را حساب کنیم، داریم: $|AB| = |A| |B| = (ad - bc)^2 > 0$

پس گزینه‌ای صحیح است که دترمینانش مثبت باشد. بررسی گزینه‌ها:

$$۱) \begin{vmatrix} ۳ & ۴ \\ ۵ & ۲ \end{vmatrix} = ۶ - ۲۰ = -۱۴ < 0$$

$$۲) \begin{vmatrix} ۳ & ۰ \\ ۲ & -۱ \end{vmatrix} = -۳ < 0$$

$$۳) \begin{vmatrix} ۳ & ۴ \\ ۰ & ۱ \end{vmatrix} = ۳ > 0$$

$$۴) \begin{vmatrix} -۱ & ۱ \\ ۰ & ۴ \end{vmatrix} = -۴ < 0$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. از رابطه‌ی $AA^{-1} = I$ استفاده می‌کنیم، سپس از A فاکتور می‌گیریم: ۸۵

$$|A + ۲I| = ۱۰ \Rightarrow |AI + ۲AA^{-1}| = ۱۰ \Rightarrow |A(I + ۲A^{-1})| = ۱۰ \Rightarrow |A| \times |I + ۲A^{-1}| = ۱۰$$

$$\xrightarrow{|A|=۲} |I + ۲A^{-1}| = ۵$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. برای آن‌که دستگاه، جواب منحصر به فرد داشته باشد باید: ۸۶

$$\frac{k}{k-۱} \neq \frac{۲}{-۱} \Rightarrow ۲k - ۲ \neq -k \Rightarrow k \neq \frac{۲}{۳}$$

$$\frac{k}{k-۱} = \frac{۲}{-۱} \neq \frac{-۱}{۲} \Rightarrow k = \frac{۲}{۳}$$

$$\frac{k}{k-۱} = \frac{۲}{-۱} = \frac{-۱}{۲} \Rightarrow k \in \emptyset$$

برای آن‌که جواب نداشته باشد، باید:

برای آن‌که بی‌شمار جواب داشته باشد، باید:

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۸۷

$$A^۲ + ۲AC = ۴B \Rightarrow (۲I)^۲ + ۲(۲I)C = ۴ \begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ ۳ & ۵ \end{bmatrix} \Rightarrow ۴I + ۴C = \begin{bmatrix} ۸ & ۸ \\ ۱۲ & ۲۰ \end{bmatrix} \Rightarrow C = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های C برابر است با $۱ + ۲ + ۳ + ۴ = ۱۰$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا ماتریس AB را به دست می‌آوریم. چون مجموع عناصر قطر اصلی AB را می‌خواهیم ۸۸

$$AB = \begin{bmatrix} ۶a & ? & ? \\ ۰ & -۴c & ? \\ ۰ & ۰ & ۲b \end{bmatrix}$$

سایر درایه‌ها را محاسبه نمی‌کنیم. توجه کنید که

$$= ۶a - ۴c + ۲b = ۲(۳a - ۲c + b) = ۱۸$$

مجموع درایه‌های قطر اصلی AB

بنابراین

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا ماتریس‌های A و B را به دست می‌آوریم.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 4 & 0 & 6 \\ 6 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

اکنون به دست می‌آید

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در صورتی در ضرب ماتریس‌ها می‌توان از اتحاد استفاده کرد که ضرب خاصیت جابه‌جایی داشته باشد و پس در این‌جا AB با BA مساوی است. داریم.

$$AB = \begin{bmatrix} a & -3 \\ b & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a + 3 & 5a - 12 \\ 2b - 4 & 5b + 16 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & -3 \\ b & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a + 5b & 14 \\ -a + 4b & 19 \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$\begin{cases} 5a - 12 = 14 \Rightarrow 5a = 26 \Rightarrow a = \frac{26}{5} \\ 5b + 16 = 19 \Rightarrow 5b = 3 \Rightarrow b = \frac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow 5a - 5b = 26 - 3 = 23$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا ماتریس A^T و سپس A^F را به دست می‌آوریم.

$$A^T = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 12 & 12 & 12 \\ 18 & 18 & 18 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} = 6A$$

سپس:

$$A^F = A^T \times A^T = 6A \times 6A = 36A^T = 36 \times 6A = 216A = 216 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های ستون دوم A^F برابر $1296 = 216(1 + 2 + 3)$ است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. از فرض سؤال به صورت زیر استفاده می‌کنیم.

$$A^T - A + I = 0 \Rightarrow A^T = A - I \xrightarrow{A \times \cdot} A^T = A^T - A \xrightarrow{A^T = A - I}$$

$$A^T = A - I - A \Rightarrow A^T = -I$$

بنابراین:

$$A^{FV} = (A^T)^{15} \times A^T = (-I)^{15} \times A^T = -I \times A^T = -A^T = -(A - I) = I - A$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. از فرض سؤال به صورت زیر استفاده می‌کنیم.

$$A + B = I \Rightarrow A = I - B \xrightarrow{\text{توان } 2} A^T = I + B^T - 2B \xrightarrow{B^T = -2B} A^T = I - 3B - 2B$$

$$\Rightarrow A^T = I - 5B \xrightarrow{\text{در } B \text{ از راست ضرب می‌کنیم}} A^T B = B - 5B^T \xrightarrow{B^T = -2B} A^T B = B + 10B$$

$$\Rightarrow A^T B = 16B$$

۹۴

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. هریک از درایه‌های ماتریس A یک دترمینان 2×2 است. حاصل آن‌ها را محاسبه می‌کنیم تا درایه‌های ماتریس A به دست آیند.

$$A = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -6 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} = -18 + 3 = -15$$

$$\left| -\frac{1}{3}A^T \right| = \left(-\frac{1}{3} \right)^2 |A|^2 = \frac{1}{9} \times (-15)^2 = 25 \quad \text{بنابراین:}$$

۹۵

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با انتخاب $a = 2$ و $b, c = 0$ حاصل دترمینان را در حالت خاص محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & a+c+2b \end{vmatrix} \xrightarrow[a, c=0]{a=2} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{برحسب ستون اول}} 2(8 - 0) = 16$$

۹۶

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$A^T = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 24 \\ \frac{1}{3} & 1 & 2 & 8 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 4 \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 24 \\ \frac{1}{3} & 1 & 2 & 8 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 4 \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 12 & 24 & 96 \\ \frac{4}{3} & 4 & 8 & 32 \\ \frac{2}{3} & 2 & 4 & 12 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

۹۷

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$A + B = A^T B \xrightarrow[\text{از چپ ضرب می‌کنیم}]{\text{طرفین را در } A^{-1}} A^{-1}A + A^{-1}B = A^{-1}A^T B \Rightarrow I + A^{-1}B = AB$$

$$\xrightarrow[\text{از راست ضرب می‌کنیم}]{\text{طرفین را در } B^{-1}} IB^{-1} + A^{-1}BB^{-1} = ABB^{-1} \Rightarrow B^{-1} + A^{-1} = A$$

۹۸

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$A^T + A + I = 0 \Rightarrow A^T + A = -I \Rightarrow A(A + I) = -I \Rightarrow A(-A - I) = I \Rightarrow A^{-1} = -A - I$$

$$\xrightarrow[\text{توان ۲}]{\text{توان ۲}} (A^T)^{-1} = A^T + I + 2A$$

بنابر فرض $A^T + A + I = 0$ نتیجه می‌گیریم $A^T + I = -A$ داریم.

$$(A^T)^{-1} = -A + 2A \Rightarrow (A^T)^{-1} = A$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از تساوی $A = B + C$ استفاده کرده می‌نویسیم:

۹۹

$$A - B = C \xrightarrow{\text{توان ۲}} (A - B)^2 = C^2 \Rightarrow (A - B)(A - B) = C^2 \Rightarrow A^2 - AB - BA + B^2 = C^2$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. فرض کنیم $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ داریم.

۱۰۰

$$A \times \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3a + 2b & a + 3b \\ 3c + 2d & c + 3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$\begin{cases} 3a + 2b = 5 \\ a + 3b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a + 2b = 5 \\ -3a - 9b = -6 \end{cases} \Rightarrow -7b = -1 \Rightarrow b = \frac{1}{7}, a = \frac{11}{7}$$

$$\begin{cases} 3c + 2d = 0 \\ c + 3d = 0 \end{cases} \Rightarrow c = 0, d = 0$$

پس فقط یک ماتریس $A = \begin{bmatrix} \frac{11}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ وجود دارد.

راه حل دوم: دترمینان ماتریس $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ غیرصفر است. پس ماتریس وارون پذیر است. با ضرب طرفین تساوی

$$A \times \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{ماتریس } A \text{ در وارون ماتریس } \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ به دست می‌آید.}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. از تساوی $A - B = I$ ماتریس B را به دست می‌آوریم:

۱۰۱

$$A - B = I \Rightarrow B = A - I \xrightarrow{\text{توان ۲}} B^2 = A^2 + I^2 - 2AI \xrightarrow{A^2=A} B^2 = A + I - 2A = I$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. می‌دانیم $A^{-1}A = I$ پس رابطه‌ی $|A^{-1} + I|$ را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

۱۰۲

$$|A^{-1} + I| = |A^{-1} + A^{-1}A| = |A^{-1}(I + A)| = |A^{-1}| |I + A| = \frac{|I + A|}{|A|}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۱۰۳

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \\ -2 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 0 + \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} = 10 - 10 = 0$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۱۰۴

$$\frac{3}{2m+1} = \frac{m}{12} = \frac{m+3}{4m+5}$$

شرط بی‌شماری جواب:

جواب مشترک دومعادله درجه دوم حاصل $m = 4$ است

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در ماتریس A^2 و A^5 ، مجموع درایه‌ها ۲ است، بنابراین مجموع درایه‌ها در تمام توان‌های

۱۰۵

ماتریس ۲ خواهد بود.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۰۶

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow -5A = \begin{bmatrix} -5 & -10 & -10 \\ -10 & -5 & -10 \\ -10 & -10 & -5 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^T - 5A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & -10 & -10 \\ -10 & -5 & -10 \\ -10 & -10 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -12 & -12 \\ -8 & -6 & -8 \\ -8 & -8 & -4 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 4 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۰۷

$$\text{if } B = \begin{bmatrix} a & \cdot & \cdot \\ \cdot & b & \cdot \\ \cdot & \cdot & c \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{then}} B^n = \begin{bmatrix} a^n & \cdot & \cdot \\ \cdot & b^n & \cdot \\ \cdot & \cdot & c^n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B^r = \begin{bmatrix} (-1)^r & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1^r & \cdot \\ \cdot & \cdot & (-1)^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 \end{bmatrix} = B$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۰۸

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} \text{ستون ۱ از } A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{سطر ۱ از } A^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{درایه ۱۱ از } A^T \cdot A \end{pmatrix}$$

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} \text{ستون ۱ از } A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{سطر ۱ از } A^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{درایه ۱۱ از } A^T \cdot A \end{pmatrix}$$

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} \text{ستون ۱ از } A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{سطر ۱ از } A^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{درایه ۱۱ از } A^T \cdot A \end{pmatrix}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۰۹

$$(A + I)(A^{-1} + I) = AA^{-1} + AI + IA^{-1} + I \times I$$

$$= I + A + A^{-1} + I = A + A^{-1} + 2I \Rightarrow A + A^{-1} + 2I$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow 2 + 2 + 2 + 2 = 8$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا حاصل ضرب داده شده را به دست می‌آوریم.

$$[x \ 2x - 1]_{1 \times 2} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 3} = [11x - 1 - x - 2 - 3x]_{1 \times 3}$$

$$[x \ 2x - 1]_{1 \times 2} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \begin{bmatrix} x \\ 2x \\ -1 \end{bmatrix}_{3 \times 1} = 0 \Rightarrow [11x - 1 - x - 2 - 3x]_{1 \times 3} \begin{bmatrix} x \\ 2x \\ -1 \end{bmatrix}_{3 \times 1} = 0$$

$$\Rightarrow [11x^2 - x - 2x^2 - 4x + 3x]_{1 \times 1} = 0 \Rightarrow 9x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } x = \frac{2}{9}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{2(-1)-1} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ B^{-1} &= \frac{1}{(-1)(2)-1} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow A^{-1} + B^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I \Rightarrow A^T = -IA = -A$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اگر دو ماتریس A و B تعویض پذیر باشند، آنگاه $AB = BA$ است و داریم:

$$\begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 4+3a & -8+2a \\ b-3 & -2b-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-2b & a+2 \\ 12+2b & 3a-2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4+3a = 4-2b \Rightarrow 3a = -2b \\ -8+2a = a+2 \Rightarrow a = 10 \\ b-3 = 12+2b \Rightarrow b = -15 \\ -2b-2 = 3a-2 \Rightarrow 3a = -2b \end{cases}$$

با توجه به اینکه مقادیر $a = 10$ و $b = -15$ در شرط $3a = -2b$ صدق می‌کند، پس دو ماتریس A و B به ازای این

$$a + b = 10 - 15 = -5$$

مقادیر تعویض پذیر هستند و داریم:

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. عبارت‌های «الف»، «ب» و «ج» صحیح است، اما «د» نادرست است.

$$(rA) \times (sB) = (rs) AB \neq (rs) BA$$

ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ندارد.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با اطلاعات مسئله $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$ برقرار است، پس:

$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -6 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها} = 0$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = A^T \times A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

به همین ترتیب $A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{1398} = \begin{bmatrix} 1 & 1398 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \alpha A + \beta I = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha + \beta & \alpha \\ 0 & \alpha + \beta \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha = 1398 \end{cases} \Rightarrow \beta = -1397$$

$$\alpha - \beta = 2795$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a & 1 \\ -1 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 1 \\ -1 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 - 1 & 2a \\ -2a & a^2 - 1 \end{bmatrix}$$

$$A^T = A^T \times A = \begin{bmatrix} a^2 - 1 & 2a \\ -2a & a^2 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 1 \\ -1 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 - 3a & 3a^2 - 1 \\ -3a^2 + 1 & a^2 - 3a \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های ماتریس A^T برابر صفر است. بنابراین داریم:

$$(a^2 - 3a) + (3a^2 - 1) + (-3a^2 + 1) + (a^2 - 3a) = 0$$

$$\Rightarrow 2(a^2 - 3a) = 0 \Rightarrow 2a(a^2 - 3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \text{ غقق..} \\ a^2 - 3 = 0 \Rightarrow a^2 = 3 \Rightarrow a = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

بنابراین حاصل ضرب مقادیر ممکن برای a برابر است با:

$$\sqrt{3} \times (-\sqrt{3}) = -3$$

$$2b + 1 = 0 \Rightarrow 2b = -1 \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$$

$$a - 2b = 0 \Rightarrow a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$$

با جای‌گذاری مقادیر a و b در ماتریس A داریم:

$$A = \begin{bmatrix} c-1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} (c-1)^2 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \end{bmatrix}$$

ماتریس A^T ، ماتریسی اسکالر است، پس درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن برابر یکدیگرند:

$$(c-1)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow \begin{cases} c-1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow c = \frac{1}{2} \\ c-1 = \frac{1}{2} \Rightarrow c = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\max(a+b+c) = -1 - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 0$$

$$A + B = [i - j]_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A - B = [i + 3j]_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$$

طرفین رابطه بالا را از هم کم می‌کنیم:

$$(A + B) - (A - B) = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -10 \\ -4 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 2B = \begin{bmatrix} -4 & -10 \\ -4 & -10 \end{bmatrix} \Rightarrow 2B + I = \begin{bmatrix} -3 & -10 \\ -4 & -9 \end{bmatrix} = X$$

$$X^{-1} = \frac{1}{27 - 40} \begin{bmatrix} -9 & 10 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{13} \begin{bmatrix} -9 & 10 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{13} & -\frac{10}{13} \\ -\frac{4}{13} & \frac{3}{13} \end{bmatrix}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مفهوم این سؤال این است که ستون‌های دوم و سوم در عدد ۳ ضرب می‌شوند، پس حاصل دترمینان 3×3 برابر می‌شود. در نتیجه دترمینان ماتریس حاصل $2 \times 9 = 18$ می‌شود.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۲۱

$$A \times B = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 + 3a & -8 + 2a \\ b + 3 & -2b - 2 \end{bmatrix} \Rightarrow -8 + 2a = 0 \Rightarrow a = 4, b + 3 = 0 \Rightarrow b = -3$$

$$B \times A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 10 \end{bmatrix} \Rightarrow 10 + 6 + 10 + 6 = 32$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اگر A ماتریس ضرایب، X ماتریس مجهولات و B ماتریس مقادیر ثابت دستگاه باشند، آنگاه داریم:

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 + c \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ 10 + c = 1 \Rightarrow c = -9 \end{cases}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۲۳

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{bmatrix}$$

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \Rightarrow a^2 - 1 = \frac{1}{|A|} \Rightarrow |A| = \frac{1}{a^2 - 1}$$

$$|2A| = 2 \Rightarrow 4|A| = 2 \Rightarrow |A| = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{a^2 - 1} = \frac{1}{2} \Rightarrow a^2 - 1 = 2 \Rightarrow a^2 = 3 \Rightarrow a = \pm\sqrt{3}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. دو طرف تساوی $AX = A - 2I$ را از سمت چپ در A^{-1} ضرب می‌کنیم.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2 \times 3 - 1 \times 4} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \text{ داریم:}$$

$$AX = A - 2I \xrightarrow{\times A^{-1}} A^{-1}(AX) = A^{-1}(A - 2I)$$

$$\Rightarrow \underbrace{(A^{-1}A)}_I X = \underbrace{A^{-1}A}_I - 2A^{-1}I$$

$$\Rightarrow X = I - 2A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۲۵

$$||A| \ A| = |4A| = 4^3 |A| = 64 \times 4 = 256$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. دو طرف تساوی $AX = B$ را از سمت چپ در A^{-1} ضرب می‌کنیم تا ماتریس X به دست بیاید. ۱۲۶

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2(-2) - 3(-1)} \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$AX = B \xrightarrow{\times A^{-1}} A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Rightarrow \underbrace{(A^{-1}A)}_I X = A^{-1}B$$

$$\Rightarrow X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 13 \\ -1 & -8 \end{bmatrix}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. طبق دستور ساروس برای محاسبهٔ دترمینان ماتریس‌های 3×3 داریم: ۱۲۷

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ -2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = (0 + 10 + 22) - (0 + 60 - 3) = 32 - 57 = -25$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۲۸

$$A^T = \begin{bmatrix} -\tan x & 1 + \tan^T x \\ -1 & \tan x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\tan x & 1 + \tan^T x \\ -1 & \tan x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$$

$$A^T = (A^T)^T = (-I)^T = I$$

$$A^T + A^T = I - I = \bar{O}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۲۹

$$A + B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & k \\ 3 & 2 & 1 \\ 8 & 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow |A + B| = -2(12 - 8) + 2(12 - 8k) = 16 - 16k$$

$$|A| = 1(4 - 0) + k(-2 - 3) = -5k + 4$$

$$|B| = -1(2 - 10) = 8$$

$$|A + B| = |A| + |B| \Rightarrow 16 - 16k = -5k + 4 + 8 \Rightarrow 11k = 4 \Rightarrow k = \frac{4}{11}$$

$$|A| = -5 \times \frac{4}{11} + 4 = \frac{44 - 20}{11} = \frac{24}{11}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. طرفین رابطه را از راست در B و از چپ در A ضرب می‌کنیم. ۱۳۰

$$AA^{-1}B + AB^{-1}B = AIB \Rightarrow IB + AI = AB \Rightarrow AB = A + B$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۳۱

$$\begin{cases} (2-k)x + y = 0 \\ -3x + ky = 2 \end{cases} \rightarrow \frac{2-k}{-3} = \frac{1}{k} = \frac{0}{2}$$

$$\downarrow$$

$$k^2 - 2k - 3 = 0$$

$$k = -1, k = 3$$

اما با هیچ‌یک از این مقادیر k عبارت $\frac{2-k}{-3}$ یا $\frac{1}{k}$ مساوی صفر نمی‌شود، پس این معادله هرگز بی‌شمار جواب ندارد.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۳۲

$$A + I = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A + I)^2 = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(A + I)^4 = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 & -15 \\ 30 & -14 \end{bmatrix}$$

$$(A + I)^4 = mA + I \Rightarrow mA = \begin{bmatrix} 31 & -15 \\ 30 & -14 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & -15 \\ 30 & -15 \end{bmatrix} = 15A$$

$$\Rightarrow mA = 15A \Rightarrow m = 15$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نسبت به ستون اول بسط می‌دهیم. ۱۳۳

$$\text{دترمینان} = 2 \cos \theta (4 \cos^2 \theta - 1) - (2 \cos \theta - 0) = 2 \cos \theta (4 \cos^2 \theta - 2)$$

$$= 4 \cos \theta (2 \cos^2 \theta - 1) = 4 \cos \theta \cos 2\theta = \frac{4 \sin \theta \cos \theta \cos 2\theta}{\sin \theta} = \frac{\sin 4\theta}{\sin \theta}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۳۴

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$$

در نتیجه: $x - y = 3 - 5 = -2$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. حاصل دترمینان را برحسب سطر اول به دست می‌آوریم: ۱۳۵

$$|A| = x(x^2 - x) - (x^2 - 1) + x(x^2 - x) = 2x^2(x - 1) - (x + 1)(x - 1)$$

$$= (2x^2 - x - 1)(x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ 2x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases} \end{cases}$$

ریشه مضاعف $x = 1$ و ریشه‌ی ساده $x = -\frac{1}{2}$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. $A \times B$ قطری است یعنی درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی $A \times B$ باید صفر باشند، پس: ۱۳۶

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x \\ y & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 + 4y & 4x + 8 \\ 3 - y & 3x - 2 \end{bmatrix}$$

$4x + 8$ و $3 - y$ باید برابر صفر باشند، بنابراین:

$$\begin{cases} 4x + 8 = 0 \Rightarrow x = -2 \\ 3 - y = 0 \Rightarrow y = 3 \end{cases}$$

برای یافتن درایه‌ی واقع در سطر دوم و ستون اول BA ، کافی است سطر دوم B را در ستون اول A ضرب کنیم، پس:

$$BA \text{ اول ستون و دوم واقع در درایه واقع} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = 18$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. به کمک خاصیت شرکت‌پذیری در ضرب ماتریس‌ها و فرضیات سؤال داریم: ۱۳۷

$$A^T = AA^T \xrightarrow{A=AB} A^T = (AB)A^T = A(BA^T)$$

$$\xrightarrow{BA^T=B} A^T = AB \xrightarrow{AB=A} A^T = A$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۳۸

$$A = (A^{-1})^{-1} = \frac{1}{3(-5) - 7(-2)} \begin{bmatrix} -5 & -7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{-15 + 14} \begin{bmatrix} -5 & -7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^T = A \times A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & ? \\ -4 & ? \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$A^T \text{ اول ستون های درایه} = 11 - 4 = 7$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۳۹

$$\begin{vmatrix} a & b & c+2 \\ m^2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ m^2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} + 4 \Rightarrow$$

$$a \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} m^2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + (c+2) \begin{vmatrix} m^2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} m^2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} m^2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 4$$

$$\Rightarrow 2 \begin{vmatrix} m^2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4 \Rightarrow \begin{vmatrix} m^2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \Rightarrow m - 6 = 2 \Rightarrow m = 8$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا دستگاه $AX = B$ را می‌نویسیم.

$$AX = B \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & a \\ -1 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2 - 2a = b \\ -1 - 2b = a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a + b = 2 \\ a + 2b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{5}{3} \\ b = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

بنابراین:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \frac{5}{3} \\ -1 & -\frac{4}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-\frac{8}{3} + \frac{5}{3}} \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. درایه‌های ماتریس A دترمینان‌های 2×2 هستند، پس داریم:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -1 & 13 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 13 + 6 = 19$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

ماتریس‌های A و B از مرتبه‌ی 3×3 هستند، پس $|kA| = k^3 |A|$ و $|A^T| = |A|$ و $|B^T| = |B|$

$$\left| -\frac{1}{28} A^T B^T \right| = \left(-\frac{1}{28} \right)^3 |A|^3 |B|^3$$

پس لازم است $|A|$ و $|B|$ را به‌دست آوریم:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{بر حسب سطر} \\ \equiv \\ \text{سوم} \end{array} = -2(-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 4(-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 10 + 4 = 14$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{بر حسب سطر} \\ \equiv \\ \text{دوم} \end{array} = -4(-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = -20$$

بنابراین:

$$\left| -\frac{1}{28} A^T B^T \right| = \left(-\frac{1}{28} \right)^3 (14)^3 (-20)^3 = \frac{1}{-8 \times 14} \times 14^3 \times (-20)^3$$

$$= \frac{1}{-8 \times 14} \times (-8)(10)^3 = \frac{10 \times 10 \times 10}{2 \times 7} = \frac{500}{7}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با استفاده از تعریف ماتریس وارون داریم:

$$A^T = 2A + I \Rightarrow A^T - 2A = I \Rightarrow A(A - 2I) = I$$

$$\Rightarrow A^{-1} = A - 2I \Rightarrow A - A^{-1} = 2I \Rightarrow (A - A^{-1})^T = 2I \Rightarrow A^T + (A^{-1})^T - 2I = 2I$$

$$\Rightarrow A^T + (A^{-1})^T = 4I, A^T = 2A + I \Rightarrow 2A + I + (A^{-1})^T = 4I$$

$$\Rightarrow (A^{-1})^T = 2I - 2A \Rightarrow (A^T)^{-1} = 2I - 2A$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اگر سمت چپ معادله را به روش ساروس بسط دهیم خواهیم داشت:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 2 \\ 2 & 2 & x \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x^3 + 4 + 2 - (x + 4x + 2x) = 0 \Rightarrow x^3 - 7x + 6 = 0$$

دیده می‌شود $x = 1$ در این معادله صدق می‌کند، پس یک جواب معادله $x = 1$ است؛ اکنون ریشه‌های بعدی را به دست می‌آوریم.

$$\begin{array}{r} x^3 - 7x + 6 \\ -x^3 + x^2 \\ \hline x^2 - 7x + 6 \\ -x^2 + x \\ \hline -6x + 6 \\ +6 \pm 6 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} x - 1 \\ \hline x^2 + x - 6 \end{array}$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow (x + 3)(x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 2 \end{cases}$$

دو جواب دیگر $x = 2$ و $x = 3$ است؛ روی هم ۳ جواب داریم!

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. به روش استقرایی توان دوم و سوم ماتریس A را تجربه می‌کنیم،

$$A \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = 2^1 A$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} = 2^2 A$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\Rightarrow A^n = 2^{n-1} A (n \in N) \Rightarrow A^{201} = 2^{200} A$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. چون $A^3 B^4$ ماتریس 3×3 است بنابر خواص ماتریس داریم:

$$\left| \frac{1}{16} A^3 B^4 \right| = \left(\frac{1}{16} \right)^3 |A|^3 |B|^4 = \frac{1}{2^{12}} \times (3 \times 4)^3 (-2 \times -2)^4 = \frac{729}{2} = 364.5$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا ماتریس $A - I$ را پیدا می‌کنیم.

$$A - I = \begin{bmatrix} 2 & a & b \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & -1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A - I)^2 = (A - I)(A - I) = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & -1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & -1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2a & a^2 + 2b \\ 0 & 1 & 2a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A - I)^4 = (A - I)^2 (A - I)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2a & a^2 + 2b \\ 0 & 1 & 2a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2a & a^2 + 2b \\ 0 & 1 & 2a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ 0 & 1 & 4a \\ ? & ? & ? \end{bmatrix}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. بنابر فرض سؤال داریم:

۱۴۸

$${}^4A = \begin{bmatrix} b+2 & a+3 \\ b-5 & a-2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow {}^4A = \begin{bmatrix} b-1 & a+3 \\ b-5 & a-5 \end{bmatrix}$$

از آنجا که A ماتریس قطری است در نتیجه:

$$\begin{aligned} a+3 &= 0 \Rightarrow a = -3 \\ b-5 &= 0 \Rightarrow b = 5 \\ A+I &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۱۴۹

الف) نادرست، زیرا باید ماتریس A مربعی باشد و دترمینان آن مخالف صفر باشد.

ب) درست

ج) درست، زیرا حاصل ضرب دو ماتریس برابر ماتریس همانی (I) است.

د) نادرست، زیرا $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ یک ماتریس اسکالر است، اما وارون پذیر نیست چون دترمینان آن صفر است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۱۵۰

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{وارون می گیریم}} A = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}B = A \xrightarrow{A \times} B = A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & ? \end{bmatrix}$$

$$\text{مجموع درایه های قطر فرعی} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۱۵۱

$$A^T - A^T + A = 2I \Rightarrow A^T(A - I) + (A - I) = I \Rightarrow (A - I)(A^T + I) = I$$

پس وارون $A^T + I$ ، ماتریس $A - I$ است. از طرفی:

$$\left(\frac{1}{2}(A^T + I) \right)^{-1} = 2(A^T + I)^{-1} = 2(A - I) = 2A - 2I$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۱۵۲

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & * & * & * & 8 \\ * & a_{22} & * & 8 & * \\ * & * & 8 & * & * \\ * & 8 & * & a_{44} & * \\ 8 & * & * & * & a_{55} \end{bmatrix}$$

با توجه به تعریف این ماتریس، درایه های قطر فرعی A هرکدام برابر ۸ هستند. پس درایه های واقع بر قطر اصلی ماتریس A، یک دنباله ی هندسی با قدرنسبت ۲ تشکیل می دهند، بنابراین داریم:

$$a_{22} = \frac{8}{2} = 4, a_{11} = \frac{4}{2} = 2, a_{44} = 8 \times 2 = 16, a_{55} = 16 \times 2 = 32$$

$$2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 62$$

بنابراین مجموع این درایه ها برابر است با:

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر دو ماتریس A و B تعویض پذیر باشند، یعنی $AB = BA$ آن گاه اتحادهای جبری برقرارند.

۱۵۳

$$(A+B)^T - (A-B)^T + BA \\ = A^T + {}^TAB + B^T - (A^T - {}^TAB + B^T) + BA = {}^TAB + AB = {}^5AB$$

$$A^T + A^T + A + I = \overline{O} \Rightarrow A^T = -A^T - A - I \quad (1)$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۱۵۴

$$\Rightarrow A^T + A^T + A + I = \overline{O} \Rightarrow -A^T - A^T - A = I \Rightarrow A(-A^T - A - I) = I$$

$$\Rightarrow A^{-1} = -A^T - A - I \xrightarrow{(1)} A^{-1} = A^T$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -2 \\ 3 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -x-4 \\ 10 & 2x+6 \end{bmatrix}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۱۵۵

ماتریس AB در صورتی وارون پذیر نیست که دترمینان آن برابر صفر باشد. داریم:

$$|AB| = 5(2x+6) - 10(-x-4) = 20x + 70 = 0 \Rightarrow x = \frac{-7}{2}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۱۵۶

$$A+B = \begin{bmatrix} 14 & -13 & 12 \\ -11 & -10 & -17 \\ -21 & 16 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -11 & 13 & -12 \\ 11 & 13 & 17 \\ 21 & -16 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = 3I$$

از طرفی:

$$(A^T + {}^T B + AB)^{1*} = (A(A+B) + {}^T B)^{1*} = ({}^T A + {}^T B)^{1*} = ({}^T(A+B))^{1*} \\ = {}^T(A+B)^{1*} = {}^T(A+B)^{1*} \times ({}^T I)^{1*} = {}^T(A+B)^{1*} \times {}^T I^{1*} \times I = {}^T I^{1*} I$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون ضرب A و I تعویض پذیرند پس هر ماتریسی که فقط شامل A و I باشد حاصلضربش با ماتریس A تعویض پذیر است. بنابراین هر ۴ مورد داده شده با ماتریس A تعویض پذیر است.

۱۵۷

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۱۵۸

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} a-1 & b \\ {}^T c & {}^T d \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -1 = a-1 \Rightarrow a = 0 \\ b = -4 \\ 1 = {}^T c \Rightarrow c = \frac{1}{T} \\ {}^T d = -2 \Rightarrow d = -1 \end{cases} \\ \Rightarrow \frac{a+d}{b+c} = \frac{0-1}{-4+\frac{1}{T}} = \frac{-1}{-\frac{4}{T}} = \frac{T}{4}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۵۹

ابتدا ماتریس X را به دست می‌آوریم:

$$X = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$X^{-1} = \frac{1}{2 \times 2 - (-1) \times (-3)} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

حال وارون این ماتریس را به دست می‌آوریم:

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۶۰

$$\begin{cases} 3A + 2B = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 14 \end{bmatrix} \xrightarrow{\times 2} 6A + 4B = \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 14 & 28 \end{bmatrix} \\ 2A - 3B = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 9 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\times 3} 6A - 9B = \begin{bmatrix} -3 & 21 \\ 18 & 15 \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow 13A = \begin{bmatrix} 13 & 26 \\ 39 & 52 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 13 & 26 \\ 39 & 52 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

بنابراین: مجموع درایه‌های $A = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. دو ماتریس A و $3I - A$ وارون هم هستند، بنابراین داریم: ۱۶۱

$$A^{-1} = 3I - A \Rightarrow A + A^{-1} = 3I \Rightarrow (A + A^{-1})^T = (3I)^T = 9I^T = 9I = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ مجموع درایه‌ها $= 9 + 9 = 18$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۶۲

$$I = \begin{bmatrix} 4^{x-y} & 0 \\ x+y+z & 5^{x-4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x-y=0 \Rightarrow x=y \\ x-4=0 \Rightarrow x=4 \\ x+y+z=0 \Rightarrow z=-8 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 4 & -8 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 4 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 4 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ -16 & 60 \end{bmatrix}$$

حاصل جمع درایه‌ها $= 12 + 4 - 16 + 60 = 60$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۶۳

ماتریس‌های $kA + I$, $3A + I$ وارون یک‌دیگرند. بنابراین حاصل ضرب آن‌ها برابر ماتریس همانی است.

$$(kA + I)(3A + I) = I \Rightarrow 3kA^2 + kA + 3A + I \xrightarrow{A^2=3A} 9kA + kA + 3A = \overline{0} \Rightarrow (10k + 3)A = \overline{0} \xrightarrow{A \neq \overline{0}} 10k + 3 = 0 \Rightarrow k = -\frac{3}{10}$$

$$9kA + kA + 3A = \overline{0} \Rightarrow (10k + 3)A = \overline{0} \xrightarrow{A \neq \overline{0}} 10k + 3 = 0 \Rightarrow k = -\frac{3}{10}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۶۴

$$A^2 + 5A - 6I = \overline{0} \Rightarrow A^2 + 5A = 6I$$

$$\xrightarrow{+6I} (A + 2I)(A + 3I) = A^2 + 5A + 6I = 6I + 6I = 12I$$

$$\Rightarrow (A + 2I)(A + 3I) = 12I \Rightarrow (A + 2I) \left(\frac{1}{12}(A + 3I) \right) = I \Rightarrow (A + 2I)^{-1} = \frac{1}{12}(A + 3I)$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۶۵

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1} B, A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x + y = 3 + 0 = 3$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۶۶

با توجه به توضیحات مسأله داریم:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a & \cdot & \cdot \\ \cdot & b & \cdot \\ \cdot & \cdot & c \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} k & \cdot & \cdot \\ \cdot & k & \cdot \\ \cdot & \cdot & k \end{bmatrix}}_B = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}}_I \Rightarrow \begin{bmatrix} ak & \cdot & \cdot \\ \cdot & bk & \cdot \\ \cdot & \cdot & ck \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}$$

پس $ak = 1$, $ck = 1$ چون a, b, c و k اعداد طبیعی هستند، بنابراین: $a = b = c = k = 1$ ، بنابراین مجموع

درایه‌های هر دو ماتریس برابر است با:

$$a + b + c + 3k = 1 + 1 + 1 + 3 = 6$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۶۷

طرفین تساوی $AB = A^{-1}$ را در A^{-1} از چپ ضرب می‌کنیم تا ماتریس B به دست آید.

$$AB = A^{-1} \xrightarrow{A^{-1} \times} B = (A^{-1})^T \quad (1)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}} \begin{bmatrix} 2 & -\frac{3}{4} \\ -1 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 2 & -\frac{3}{4} \\ -1 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$(2) \text{ و } (1) \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 76 & -30 \\ -40 & 16 \end{bmatrix}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۶۸

اگر مجموع شماره سطر (i) و شماره ستون (j) یک درایه، عددی زوج باشد، آن درایه برابر با $j^2 - i^2$ و اگر مجموع شماره سطر و شماره ستون یک درایه، عددی فرد باشد، آن درایه برابر با $j^2 + i^2$ است.

مجموع درایه‌های ستون سوم برابر است با:

$$a_{13} + a_{23} + a_{33} = (3^2 - 1) + (2^2 + 3) + (3^2 - 3) = 8 + 7 + 6 = 21$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۶۹

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

می‌دانیم $I^{-1} = I$ است پس:

$$(A^T B^{-T})^{-1} = (IB^{-T})^{-1} = B^T$$

مسأله گفته است که B و $B - I$ وارون هم هستند پس:

$$B(B - I) = I \Rightarrow B^T - B = I \Rightarrow B^T = B + I \quad (1)$$

طرفین رابطه (۱) را در B ضرب می‌کنیم، داریم:

$$B^T = B^T + B \xrightarrow{(1)} B^T = (B + I) + B = 2B + I$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا درایه‌های ماتریس A^2 را به دست آورید:

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

اکنون فقط درایه‌های سطر اول ماتریس A^3 را به دست می‌آوریم:

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ & & \end{bmatrix}$$

بنابراین درایه‌های سطر اول ماتریس A^3 به صورت $[1 \ -1 \ 0]$ است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. برای محاسبه‌ی دترمینان ماتریس A از ستون سوم استفاده می‌کنیم:

$$|A| = -1(-9 - (-8)) = -1(-1) = 1$$

ماتریس B یک ماتریس قطری است که دترمینانش برابر است با حاصل‌ضرب درایه‌های روی قطر اصلی:

$$|B| = (-2)(-1)(4) = 8$$

و به کمک ویژگی‌های دترمینان یک ماتریس، داریم:

$$\left| -\frac{1}{16} A^{10} B^5 \right| = \left(-\frac{1}{16} \right)^3 \times |A|^{10} \times |B|^5 = -\frac{1}{2^{12}} \times 1^{10} \times 8^5 = -\frac{1}{2^{12}} \times 2^{15} = -2^3 = -8$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$A^3 = A^2 \times A = -I \times A = -A$$

$$A^5 = A^3 \times A^2 \times A = (-A)(-A) \times A = A^3 = -A$$

$$A^3 + A^5 = -2A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A^3 + A^5)^{-1} = (-2A)^{-1} = \frac{-1}{2} A^{-1} = -\frac{1}{2} \times \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} A$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

دستگاه معادلات $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ بی‌شمار جواب دارد، هرگاه $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ باشد، بنابراین شرط بی‌شمار جواب داشتن دستگاه داده شده عبارت است از:

$$\frac{m-1}{3} = \frac{1}{m+1} = \frac{m}{2} \Rightarrow m^2 - 1 = 3 \Rightarrow m^2 = 4 \Rightarrow m = 2 \text{ یا } m = -2$$

اگر $m = 2$ ، آن‌گاه تناسب $\frac{m-1}{3} = \frac{1}{m+1} = \frac{m}{2}$ نادرست می‌شود زیرا به صورت $\frac{1}{3} = \frac{1}{3} = 1$ درمی‌آید.

اگر $m = -2$ ، آن‌گاه تناسب $\frac{m-1}{3} = \frac{1}{m+1} = \frac{m}{2}$ درست می‌شود زیرا به صورت $-1 = -1 = -1$ درمی‌آید.

پس به ازای $m = -2$ دستگاه داده شده بی‌شمار جواب دارد.

طرفین فرض $\overline{O} = 2A + 3A + 4I$ را در A^{-1} ضرب می‌کنیم، داریم:

$$2A + 3I + 4A^{-1} = \overline{O} \Rightarrow 4A^{-1} = -2A - 3I \xrightarrow{\text{تقسیم بر ۴}} A^{-1} = -\frac{1}{2}A - \frac{3}{4}I$$

با مقایسه رابطه به دست آمده با فرض $A^{-1} = mA + nI$ نتیجه می‌گیریم: $m = -\frac{1}{2}$ و $n = -\frac{3}{4}$ ، پس:

$$\frac{n}{m} = \frac{-\frac{3}{4}}{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}$$

وقتی اتحاد مزدوج $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ برقرار است یعنی $AB = BA$ (A و B تعویض پذیر است)، پس:

$$2AB + 3BA = \overline{O} \xrightarrow{AB=BA} 2AB + 3AB = \overline{O}$$

$$\Rightarrow 5AB = \overline{O} \Rightarrow AB = \overline{O} \Rightarrow BA = \overline{O}$$

$$(2I + CA)(B + BA) = 2B + 2BA + CAB + CABA$$

با توجه به این که $AB = BA = \overline{O}$ است پس:

$$(2I + CA)(B + BA) = 2B$$

برای به دست آوردن ماتریس A، طرفین تساوی داده شده را از سمت چپ در وارون ماتریس $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ یعنی

$$\frac{1}{-1} \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ ضرب می‌کنیم:}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \times} A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? & 4 \\ -1 & ? \end{bmatrix}$$

پس جمع درایه‌های قطر فرعی A برابر با $3 - 1 = 4$ است.

توجه کنید فقط درایه‌های قطر فرعی A موردنظر است، پس نیازی به محاسبه درایه‌های قطر اصلی نیست!

گزاره «الف» نادرست است. باید ذکر شود A و B، ماتریس‌های مربعی هم‌مرتبه هستند.

گزاره «ب» نادرست است. به عنوان مثال $\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$ ولی ماتریس‌های $\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ و $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$ برابر نیستند.

گزاره «ج» درست است زیرا:

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 6 \\ -2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{بر حسب سطر سوم}} 2(-1)^6 \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 2(12 - 10) = 4$$

گزاره «د» نادرست است زیرا $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ یک ماتریس اسکالر است، اما وارون پذیر نیست (چون دترمینان ماتریس صفر

است).

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اگر $A_{m \times n}$ و $B_{n \times m}$ به طوری که $m > n$ آنگاه دترمینان ماتریس AB برابر صفر است. در اینجا ماتریس B از مرتبه‌ی 3×1 و ماتریس A از مرتبه‌ی 1×3 است، پس بنابر نکته‌ی بالا $|BA| = 0$ است. کافی است $|AB|$ را حساب کنیم. برای این کار ابتدا ماتریس AB را به دست می‌آوریم.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 - 3 + 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \end{bmatrix} \Rightarrow |AB| = 12$$

بنابراین:

$$|AB| + |BA| = 12 + 0 = 12$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. می‌دانیم اگر A و B ماتریس‌های هم‌مرتبه باشند، آنگاه $|AB| = |A| |B|$ است. اگر $A_{n \times n}$ باشد، آنگاه $|kA| = k^n |A|$ است.

اگر $|A| \neq 0$ باشد، $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ است.

از طرفین تساوی داده شده دترمینان می‌گیریم.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 2I \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} |A| \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = |2I|$$

$$\Rightarrow (-1) |A| (4) = 2^3 |I| \xrightarrow{|I|=1} |A| = -1$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} \left| -\frac{1}{4} BAB^{-1} \right| &= \left(-\frac{1}{4} \right)^3 |B| |A| |B^{-1}| \\ &= \frac{1}{4} |B| |A| \frac{1}{|B|} = \frac{|A|}{4} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

می‌دانیم در ضرب ماتریس‌ها نمی‌توان از اتحادها استفاده کرد. پس ماتریس $(A - B)^T$ را به صورت زیر به دست می‌آوریم.

$$(A - B)^T = (A - B)(A - B) = A^T - AB - BA + B^T \quad (1)$$

بنابر فرض سؤال داریم:

$$(A - B)^T = A^T + B^T$$

$$\xrightarrow{(1)} A^T - AB - BA + B^T = A^T + B^T$$

$$\Rightarrow -AB - BA = \overline{0} \Rightarrow AB = -BA$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

با توجه به اینکه $|A| \neq 0$ است، پس A وارون پذیر است.

عبارت ماتریسی داده شده را از چپ در $A^{-۳}$ ضرب می کنیم تا X تنها شود.

$$A^۳ X - A^{-۱} = ۲A^۳ \xrightarrow{A^{-۳} \times} X - A^{-۴} = ۲A^{-۱}$$

از آنجا که $(A^{-۱})^n = (A^n)^{-۱}$ است، خواهیم داشت:

$$X = ۲A^{-۱} + (A^{-۱})^۴$$

حالا باید $A^{-۱}$ را به دست بیاوریم.

$$A^{-۱} = \frac{1}{-۱} \begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

با محاسبه $(A^{-۱})^۴$ در یک قدمی پاسخ خواهیم بود.

$$(A^{-۱})^۳ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = I$$

$$\Rightarrow (A^{-۱})^۴ = ((A^{-۱})^۳)^۱ = I^۳ = I$$

بنابراین: $X = ۲A^{-۱} + (A^{-۱})^۴$

$$X = ۲ \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

مجموع درایه های ستون دوم ماتریس X برابر با ۳- است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$۳A = ۶I - ۱۲A^{-۱} \xrightarrow{\times \frac{1}{۳}} A = ۲I - ۴A^{-۱} \xrightarrow{\times A} A^۲ = ۲A - ۴I$$

$$\Rightarrow A^۳ = ۲(۲I - ۴A^{-۱}) - ۴I$$

$$A^۳ = -۸A^{-۱} \xrightarrow{\times A} A^۴ = -۸I \xrightarrow{\times (-۲)} -۲A^۴ = ۱۶I \Rightarrow |-۲A^۴| = |۱۶I| = ۱۶^۳ \times ۱ = ۴۰۹۶$$

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-۱} = \frac{1}{۲} \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۲ & ۰ \end{bmatrix}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$A^۳ = \begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲ & ۰ \\ ۰ & -۲ \end{bmatrix}$$

$$۶A^{-۱} + A^۳ - I = ۶ \times \frac{1}{۲} \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۲ & ۰ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۲ & ۰ \\ ۰ & -۲ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۳ \\ -۶ & ۰ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۳ & ۰ \\ ۰ & -۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۳ & ۳ \\ -۶ & -۳ \end{bmatrix}$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} -۳ & ۳ \\ -۶ & -۳ \end{bmatrix} \right) = ۹ - (-۱۸) = ۲۷$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{m}{2} & 3 & 4 \\ 0 & \frac{m}{2} & 5 \\ 0 & 0 & \frac{m}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{ماتریس بالا مثلثی}} |A| = \left(\frac{m}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}m^3$$

تذکر: دترمینان ماتریس های بالامثلثی، پایین مثلثی و قطری همگی برابر حاصل ضرب درایه های قطر اصلی است.

$$|A| \cdot |A| = |A| \xrightarrow{\text{چون } A_{3 \times 3}} |A|^3 \times |A| = |A|$$

$$\begin{cases} |A| = 0 \text{ واریون پذیر است} \\ |A| = 1 \Rightarrow \frac{1}{8}m^3 = 1 \Rightarrow m^3 = 8 \Rightarrow m = 2 \end{cases}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مطابق دستور ساروس: ۱۸۵

$$|A| = (3 - 4 - 12) - (-12 + 2 - 6) \Rightarrow |A| = 3$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \times X = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -3 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -15 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \text{حاصل ضرب درایه های قطر فرعی } X = 45$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۸۶

$$[1 \ x \ -1] \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ -x \\ a \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow [2 + x \ 2 \ 1 - x] \begin{bmatrix} x \\ -x \\ a \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 2x + x^2 - 2x + a - ax = 0 \Rightarrow x^2 - ax + a = 0$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow a^2 - 4a = 0 \Rightarrow a(a - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 4 \end{cases}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۸۷

$$A^T + A^T + A + I = \overline{O} \Rightarrow A^T = -A^T - A - I \quad (1)$$

$$A^T + A^T + A + I = \overline{O} \Rightarrow -A^T - A^T - A = I$$

$$\Rightarrow A(-A^T - A - I) = I \Rightarrow A^{-1} = -A^T - A - I \xrightarrow{(1)} A^{-1} = A^T$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اگر $A = \begin{bmatrix} a & 2 \\ b & -5 \end{bmatrix}$ ، $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه داریم: ۱۸۸

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ -b & a \end{bmatrix} \xrightarrow{|A|=17} A^{-1} = \frac{1}{17} \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ -b & a \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{17} \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} = \frac{1}{17} \begin{bmatrix} -34 \\ -4b + 7a \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ \frac{7a-4b}{17} \end{bmatrix} \Rightarrow x = -2$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.
ابتدا ماتریس A^2 را به دست می‌آوریم.

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -1 \\ \frac{25}{16} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -1 \\ \frac{25}{16} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$$

$$A^{1402} = (A^2)^{701} = (-I)^{701} = -I = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های ماتریس A^{1402} برابر ۲- است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

بنابر فرض ماتریس جدید $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -2 & 2 & 2 \\ m & 1 & -4 \end{bmatrix}$ است و باید حساب عبارت زیر را به دست آوریم.

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -2 & 2 & 2 \\ m & 1 & -4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -2 & 2 & -1 \\ m & 1 & -4 \end{vmatrix} = 2$$

اکنون هر دو دترمینان را برحسب سطر دوم به دست می‌آوریم. در این صورت داریم:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -2 & 2 & 2 \\ m & 1 & -4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -2 & 2 & -1 \\ m & 1 & -4 \end{vmatrix} = (2+1)(-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ m & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$\Rightarrow -3(3+m) = 2 \Rightarrow -9-3m = 2 \Rightarrow m = -\frac{11}{3}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} 3A + 2B = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 14 \end{bmatrix} \xrightarrow{\times 2} 6A + 4B = \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 14 & 28 \end{bmatrix} \\ 2A - 3B = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 9 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\times 3} 6A - 9B = \begin{bmatrix} -3 & 21 \\ 27 & 15 \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow 13A = \begin{bmatrix} 13 & 26 \\ 39 & 52 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 13 & 26 \\ 39 & 52 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

بنابراین: A مجموع درایه‌های $10 = 1 + 2 + 3 + 4$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در ماتریس AB سطرها مضرب یکدیگرند (مثلاً سطر اول m برابر سطح دوم است). پس دترمینان آن صفر است. از طرفی:

$$BA = [-m + m - 1] \Rightarrow |BA| = |[-1]| = -1$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا ماتریس A^T را پیدا می‌کنیم.

$$A^T = A \times A = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

بنابراین:

$$A^{1402} = (A^T)^{701} = I^{701} = I$$

$$A^{1401} = (A^T)^{700} \times A = I^{700} \times A = I \times A = A$$

$$A^{1402} - A^{1401} = I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های ماتریس خواسته شده برابر ۳ است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$(A^{-1}BA)^T = \underbrace{(A^{-1}BA)}_I \underbrace{(A^{-1}BA)}_I (A^{-1}BA) = A^{-1}B^T A \quad (۱)$$

$$|A| = 3 - 4 = -1 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 2I \xrightarrow{B \times} B^T = 2BI = 2B = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

بر اساس (۱) داریم:

$$C = (A^{-1}BA)^T = A^{-1}B^T A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C \text{ درایه سطر دوم و ستون اول } C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = -12 + 4 = -8$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا ماتریس A^{-1} را پیدا می‌کنیم.

$$2A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

اکنون ماتریس A^{-1} و A را در تساوی داده شده قرار می‌دهیم.

$$A^{-1} = mA + nI \Rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{m}{2} + n & -\frac{m}{2} \\ \frac{3m}{2} & -\frac{m}{2} + n \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{m}{2} + n = -\frac{1}{2} \Rightarrow n = -\frac{m}{2} - \frac{1}{2} \\ -\frac{m}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow m = -1 \end{cases}$$

بنابراین:

$$mn = \cdot$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. از فرض نتیجه می‌گیریم $AB = -BA$ ، بنابراین داریم:

$$|A||B| = |AB| = |-BA| = (-1)^T |BA| = -|B||A| \Rightarrow |A||B| = 0 \Rightarrow |A| = 0 \text{ یا } |B| = 0$$

پس عبارت الف درست است.

$$A^T B = A(AB) = A(-BA) = -(AB)A = -(-BA)A = BA^T \Rightarrow A^T B - BA^T = \vec{0}$$

بنابراین عبارت ب نادرست است.

$$(A+B)^T = A^T + B^T + \underbrace{AB+BA}_{\vec{0}} \Rightarrow |(A+B)^T| = |A^T + B^T| \Rightarrow |A+B|^T = |A^T + B^T|$$

پس عبارت پ درست است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با ضرب A در دو طرف معادله داده شده، خواهیم داشت:

$$A^{-1} + A = 4I \Rightarrow A \times A^{-1} + A \times A = 4A \times I \Rightarrow I + A^T = 4A \Rightarrow A^T = 4A - I \quad (*)$$

$$A^T = (A^T)^T \xrightarrow{(*)} A^T = (4A - I)^T = 16A^T - 8A + I = 16(4A - I) - 8A + I$$

$$= 64A - 16I - 8A + I = 56A - 15I$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. از ماتریس A از چپ و از ماتریس B از راست فاکتور می‌گیریم.

$$A \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -6 & -1 \end{bmatrix} B - \frac{3}{2} A \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -4 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} B = A \left(\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -6 & -1 \end{bmatrix} - \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -4 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \right) B$$

$$= A \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} B = A(-3I)B = -3AB = -3 \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & -6 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

بنابراین حاصلضرب درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی این ماتریس برابر ۹ است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. توان‌های بالاتر A را به دست می‌آوریم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 13 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow 2 \times 3$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 13 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 33 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow 3 \times 3$$

$$\Rightarrow A^{10} \text{ سوم ستون سوم درایه سطح دوم} = 10 \times 3 = 30 \Rightarrow n = 30$$

$$\begin{cases} 10x - 4y = 30 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$$

با جایگذاری $n = 30$ در دستگاه معادلات خواهیم داشت:

$$\frac{10}{2} \neq \frac{-4}{3} \Rightarrow \text{یک جواب منحصر به فرد}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۲۰۰

$$\frac{m-2}{3} = \overbrace{\frac{2}{m+3}}^{(*)} \neq \frac{8}{m}$$

$$m^2 + m - 6 = 6 \Rightarrow m^2 + m - 12 = 0 \Rightarrow (m+4)(m-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -4 & \text{غ ق} \\ m = 3 & \text{ق ق} \end{cases}$$