

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$a|3(4n+3) - 4(3n-1) \Rightarrow a|13$$

توجه: $\frac{a|b}{a|c} \Rightarrow a|bx+cy$

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. می‌دانیم اگر $a|b$ ، گزاره‌های زیر همواره درست هستند:

$$a|mb \quad (I), a^n|b^n \quad (II)$$

$$a|b \xrightarrow{II} a^2|b^2 \xrightarrow{I} a^2|b^2 \times b \Rightarrow a^2|b^3$$

بقیه‌ی گزینه‌ها به ازای $a=b=3$ رد می‌شوند.

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. می‌دانیم که $37! = 37 \times 36 \times \dots \times 2 \times 1$ است. گزینه‌ها را می‌توانیم به‌صورت نسبتاً تجزیه‌ی شده‌ی (!) بنویسیم:

$$40 = 5 \times 8, 39 = 3 \times 13, 38 = 2 \times 19$$

در عبارت $37! = 37 \times 36 \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$ عوامل $5 \times 8, 3 \times 13, 2 \times 19$ وجود دارد. مثلاً دقت کنید:

$$\frac{37!}{39} = \frac{37 \times 36 \times \dots \times \cancel{18} \times \dots \times \cancel{2} \times 1}{\cancel{18} \times \cancel{2}} \in \mathbb{Z}$$

پس می‌توان نتیجه گرفت که $37!$ بر 39 بخش‌پذیر است. برای 38 و 40 هم به همین صورت است. پس $37!$ بر 38 هم بخش‌پذیر است. ولی عدد 41 یک عدد اول است و نمی‌توان آن را به‌صورت ضرب عوامل کوچک‌تر از 41 درهم نوشت. پس در $37!$ هیچ عاملی وجود ندارد که با 41 ساده شود. این‌جا است که $37!$ نمی‌تواند بر 41 بخش‌پذیر باشد.

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. اگر دو عدد را a و b و b و a را m و n بنامیم:

$$a = a'd, b = b'd, (a', b') = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{ک.م.م} = c = a'b'd \\ \text{تفاضل} = a-b = (a'-b')d \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{طبق فرض}} \frac{a'b'}{a'-b'} = \frac{12}{1}$$

چون a' و b' نسبت به هم اول‌اند، پس $a'b'$ و $a'-b'$ هم نسبت به هم اول‌اند. بنابراین:

$$\left. \begin{array}{l} a'b' = 12 \\ a'-b' = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow a' = 4, b' = 3$$

$$a+b = 112 \Rightarrow (a'+b')d = 112 \Rightarrow vd = 112 \Rightarrow d = 16$$

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

می‌دانیم $a^{k+r} \equiv a^r, 1 \leq r \leq 4$

$$\Rightarrow 177^{52} \equiv 177^4 \equiv 177^2 \equiv (-3)^2 \equiv 9 \equiv 1$$

* توجه: اگر سمت چپ مضرب ۴ بود، در سمت راست $2=4$ قرار می‌دهیم.

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

فرض: $(a, p) = 1 \xrightarrow{\text{عدد اول } p} a^{p-1} \equiv 1$

$$p = 13 \xrightarrow{(a, 13)=1} a^{12} \equiv 1$$

$$\Rightarrow 5^{12} + 6^{12} + 7^{12} + 8^{12} \equiv 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. بنابر قانون تقسیم داریم $\begin{cases} a = bq + q, 0 \leq q < b \\ a = (b-3)(q+5) + 0, b > 3 \end{cases}$ پس خواهیم داشت

$bq + q = bq - 3q + 5b - 15 \Rightarrow 5b - 4q = 15$ در نتیجه $\begin{cases} b = 4t + 3 \\ q = 5t \end{cases}$ با توجه به نامساوی‌های $0 \leq q < b, b > 3$ نتیجه می‌شود: $4t + 3 < 5t$ و $t > 0$ فقط $t = 1, 2$ می‌شود پس $q = 5, 10$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۸

$$a = bq + 11 \xrightarrow{a > 2 \text{ عدد اول}} (a - 11) = \text{عددی زوج}$$

$$\Rightarrow bq = \text{عددی زوج} \xrightarrow{b > 11 \text{ عدد اول}} q \Rightarrow q = 2$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۹

$$a = bq + r$$

اثبات گزینه ۲ «۲»، طبق صورت سؤال داریم:

$$(a, b) = (bq + r, b) = (bq + r - bq, b) = (r, b)$$

نکته: برای دو عدد صحیح m, n داریم: $(k \in \mathbb{Z})$

$$(m, n) = (m, n \pm km)$$

$$a = 42, b = 9, q = 4, r = 6 \text{ : مثال نقض گزینه‌های «۱ و ۳ و ۴»}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۱۰

هر کلمه ۳ حرفی که با حروف کلمه‌ی pipe ساخته می‌شود یا شامل یک حرف p یا دو حرف p خواهد بود.

$$\begin{cases} \left(\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right) \times \frac{2!}{1!} = 2 \times 2 = 4 \Rightarrow 4 + 4 = 8 \\ \text{تعداد کلمات با دو حرف } p \\ \text{تعداد کلمات با یک حرف } p: 3! = 6 \end{cases}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۱۱

$$2^6 a \equiv 12 \Rightarrow 8a \equiv 12 \Rightarrow 2a \equiv 3 \Rightarrow 2a \equiv 3 \Rightarrow 2a \equiv 12$$

$$\Rightarrow a \equiv 6 \Rightarrow a = 6 + 9k \Rightarrow \text{کوچک‌ترین عدد سه رقمی} = 6 + 9 \times 11 = 105$$

$$ac \equiv bc \Rightarrow a \equiv b \pmod{d}; (d = (m, c)) \text{ توجه:}$$

$$1391^{2012} \equiv 5^{2012} \equiv 5^2 \equiv 3$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۱۲

$$5^{10} \equiv 1 \rightarrow 5^{2010} \equiv 1$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۱۳

$$\frac{a+b}{2} = [a, b]: \frac{(a'+b')d}{2} = a'b' \Rightarrow \frac{a'b'}{a'+b'} = \frac{1}{2} \xrightarrow{(a+b) \equiv 1} \begin{cases} a'b' = 1 \\ a'+b' = 2 \end{cases} \Rightarrow a' = b' = 1$$

$$\Rightarrow a - b = (a' - b')d = 0$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. قانون همنهشتی به پیمانه ۱۷ را به کار می‌بریم.

۱۴

$$13^2 = 169 \equiv -1 \Rightarrow 13^{12} \equiv (-1)^6 \equiv 1$$

$$13^{14} \equiv -1 \Rightarrow 13^{15} \equiv -13 \equiv 4 \text{ است. ۴ عدد تقسیم عدد ۱۴}$$

$$\text{دوم} / 13^{15} \equiv R \xrightarrow{\times 13} 13^{16} \equiv 13R \xrightarrow{13^{16} \equiv 1 \text{ (فرم)}} 13R \equiv 1 \equiv 52$$

$$\xrightarrow{\div 13} R \equiv 4 \rightarrow R = 4$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. عبارت خلاصه شود:

۱۵

$$345r + 92s = 23 \Rightarrow 15r + 4s = 1 \xrightarrow{\text{پیمانه ۴}} 15r \equiv -1 \pmod{4} \Rightarrow 3r \equiv 1 \pmod{4} \Rightarrow r \equiv 3 \pmod{4} \Rightarrow \begin{cases} r = 4k - 1 \\ s = -15k + 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow r + s = -11k + 3 \xrightarrow{\text{آخرین منفی}} r + s = -8 \quad k=1$$

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. عدد ۳۸۵ تجربه شود $۳۸۵ = ۵ \times ۷ \times ۱۱$ تعداد اعداد کمتر از ۳۸۵ که نسبت به آن اول

باشند برابر است با $\varphi(۳۸۵) = ۴ \times ۶ \times ۱۰ = ۲۴۰$

$$N = P_1^{\alpha_1} \times P_2^{\alpha_2} \times \dots \times P_n^{\alpha_n} : \varphi(N) = N \left(1 - \frac{1}{P_1}\right) \left(1 - \frac{1}{P_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{P_n}\right)$$

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. عدد ۱۱ اول است، اما به هیچ یک از دو صورت $2^n \pm 1$ نوشته نمی‌شود.

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. نکته: اگر a و b اعدادی صحیح باشند، کوچک‌ترین عضو مجموعه‌ی $\{a - bq \geq 0 : q \in \mathbb{Z}\}$ برابر

است با باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر b . در تقسیم عدد -۱۸۵ بر ۱۶ داریم:

$$-۱۸۵ = ۱۶ \times (-۱۲) + ۷$$

پس کوچک‌ترین عضو مجموعه‌ی $\{-۱۸۵ - ۱۶x \geq 0 : x \in \mathbb{Z}\}$ برابر است با ۷.

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$a^r | b^s \Rightarrow a \times a^r | b^s \Rightarrow \begin{cases} a | b^s \\ a^r | b^s \end{cases} \Rightarrow a | b \Rightarrow a^r | b^r \Rightarrow a^r | b^r \times b \Rightarrow a^r | b^s$$

پس رابطه‌های گزینه‌ی ۱، ۳ و ۴ همواره درست هستند ولی رابطه‌ی گزینه‌ی ۲ در حالت کلی نتیجه نمی‌شود.

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. فرض کنیم $d = (n^r + ۴n^r + ۱)$. بنابراین داریم:

$$\left. \begin{aligned} d | n^r + ۱ &\Rightarrow d | n(n^r + ۱) = n^r + n \\ d | n^r + ۴ \end{aligned} \right\}$$

$$\xrightarrow{(-)} d | (n^r + n) - (n^r + ۴) = n - ۴ \Rightarrow d | (n - ۴)(n + ۴) = n^2 - ۱۶$$

$$\left. \begin{aligned} d | n^r - ۱۶ \\ d | n^r + ۱ \end{aligned} \right\} \xrightarrow{(-)} d | (n^r + ۱) - (n^r - ۱۶) = ۱۷ \xrightarrow{d \neq 1} d = ۱۷$$

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. تعداد اسکناس‌های ۲۰۰ تومانی را x و تعداد اسکناس‌های ۵۰۰ تومانی را y در نظر

$$۲۰۰x + ۵۰۰y = ۵۱۰۰ \Rightarrow ۲x + ۵y = ۵۱ \Rightarrow ۵y \equiv ۵۱ \Rightarrow y \equiv ۱ \Rightarrow y = ۲k + ۱$$

می‌گیریم:

$$\Rightarrow ۲x + ۵(۲k + ۱) = ۵۱ \Rightarrow ۲x + ۱۰k + ۵ = ۵۱ \Rightarrow x = ۲۳ - ۵k$$

$$\left. \begin{aligned} x = ۲۳ - ۵k \xrightarrow{x \geq ۰} ۲۳ - ۵k \geq ۰ \Rightarrow k \leq ۴ \\ y = ۲k + ۱ \xrightarrow{y \geq ۰} ۲k + ۱ \geq ۰ \Rightarrow k \geq -\frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow k \in \{۰, ۱, ۲, ۳, ۴\}$$

بنابراین به ۵ طریق می‌توان پرداخت نمود.

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$۱۳۷۷ \equiv ۲ \Rightarrow ۱۳۷۷^{۱۹۹۸} \equiv ۲^{۱۹۹۸}$$

$$۲^۵ \equiv -۱ \Rightarrow (۲^۵)^{۳۹۹} \equiv -۱ \xrightarrow{\times ۲^۷} ۲^{۱۹۹۸} \equiv -۸ \equiv -۸ + ۱۱ \equiv ۳$$

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. طبق قضیه‌ی فرما اگر p عددی اول باشد و a مضرب p نباشد $a^{p-1} \equiv ۱$ و اگر a مضرب p

باشد واضح است که $a^n \equiv ۰$ بنابراین:

$$۵^۶ \equiv ۱ \Rightarrow ۵^{۱۲} \equiv ۱, ۶^{۱۲} \equiv ۱, ۸^{۱۲} \equiv ۱, ۷^{۱۲} \equiv ۱.$$

$$۵^{۱۲} + ۶^{۱۲} + ۷^{۱۲} + ۸^{۱۲} \equiv ۱ + ۱ + ۱ + ۱ \equiv ۴$$

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

مثال نقض گزینه‌ی ۲:

$$\text{مثال نقض گزینه‌ی ۱: } 2(-4) < 3(-3) \quad \begin{cases} 2 < 3 \\ -4 < -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 < 3 \\ -2 < -1 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{2}{-2} < \frac{3}{-1} \end{cases}$$

$$\text{مثال نقض گزینه‌ی ۳: } 2 - (-2) < 3 - (-1) \quad \begin{cases} 2 < 3 \\ -2 < -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \xrightarrow{\times(-1)} \begin{cases} a < b \\ -d < -c \end{cases} \quad \text{اثبات گزینه‌ی ۴:}$$

$$a - d < b - c$$

توجه کنید که طرفین دو نامساوی هم‌جهت را می‌توان با هم جمع کرد.

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. رقم سمت راست یک عدد در هر مبنا، باقی‌مانده‌ی تقسیم آن عدد بر آن مبنا است، پس داریم:

$$\left. \begin{aligned} a \equiv 1 &\Rightarrow a \equiv -1 \Rightarrow a \equiv -3 \\ a \equiv 2 &\Rightarrow a \equiv -3 \\ a \equiv 4 &\Rightarrow a \equiv -3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a \equiv_{[2,5,7]} -3$$

در نتیجه a به صورت $70q - 3$ خواهد بود که بزرگ‌ترین عدد ۲ رقمی به این صورت برابر ۶۷ است که جمع ارقام آن برابر $6 + 7 = 13$ است.

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} D = 420 \Rightarrow a \cdot b \cdot d = 420 \xrightarrow{d=7} a \cdot b' = 60 \\ d = 7 \\ a = a' \cdot d \\ b = b' \cdot d \end{cases}$$

$$a' = 60, b' = 1 \Rightarrow a + b = 61 \times 7 = 427$$

$$a' = 12, b' = 5 \Rightarrow a + b = 17 \times 7 = 119$$

$$a' = 20, b' = 3 \Rightarrow a + b = 23 \times 7 = 161$$

$$a' = 15, b' = 4 \Rightarrow a + b = 19 \times 7 = 133$$

گزینه‌ی ؟ پاسخ صحیح است. عدد $(1390)^{1390}$ را a می‌نامیم. باید باقی‌مانده‌ی a بر ۹۰ را به دست آوریم. می‌دانیم

$$90 = 9 \times 10 \quad \text{پس برای سهولت در محاسبات باقی‌مانده‌ی } a \text{ بر هر دو عدد ۹ و ۱۰ را می‌یابیم:}$$

$$\begin{cases} a \equiv_{10} 1390^{1390} \equiv 0 \\ a \equiv_9 (1 + 3 + 9 + 0)^{1390} \equiv 4^{1390} \equiv (4^3)^{463} \times 4 \equiv 1 \times 4 \equiv 4 \end{cases}$$

در میان گزینه‌ها، گزینه‌ای صحیح است که در هر دو شرط صادق باشد یعنی باقی‌مانده‌اش بر ۱۰ برابر ۰ باشد (رقم یکانش، صفر باشد) و باقی‌مانده‌اش بر ۹ برابر ۴ باشد.

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. $2^n - (-1) = 65k \Rightarrow 2^n + 1 = 65k$ یعنی عدد 2^n با عدد ۱- در یک کلاس هم‌ارزی به پیمانه۶۵ قرار دارند. (پیمانه ۶۵) $2^6 \equiv -1$ طرفین همنشینی مفروض را به توان عدد فرد می‌رسانیم.(پیمانه ۶۵) $2^{(6(2k+1))} \equiv -1$ لذا $2^{6(2k+1)} \equiv -1$ با فرض $n < 100$ داریم. $12k < 94 \rightarrow 12k + 6 < 100$ $k = 0, 1, 2, \dots, 7$ تعداد اعضا برابر ۸ می‌باشد.

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. ۲۹

$$13^{15} = 13^{4k+3} \equiv 13^3 \equiv 27 \pmod{100}$$

$$a^{4k+r} \equiv a^r, 1 \leq r \leq 4$$

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. ۳۰

$$d = (5n - 2, 12n + 7) \Rightarrow \begin{cases} d | 5n - 2 \\ d | 12n + 7 \end{cases}$$

می‌دانیم اگر $d | a$ و $d | b$ در این صورت $d | (ma + nb)$ ، یعنی d هر ترکیب خطی از a و b را نیز عاد می‌کند، داریم:

$$d | 12 \times (5n - 2) + (-5)(12n + 7) \Rightarrow d | -59 \Rightarrow d | 59 \Rightarrow d = 59 \text{ یا } d = 1$$

با توجه به این که $5n - 2$ و $12n + 7$ ، نسبت به هم اول نیستند، بنابراین ب‌م‌م آن‌ها باید ۵۹ باشد.

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. اگر a, b دو عدد صحیح باشند که d بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک آنها باشد، داریم:

$$(a, b) = d \Rightarrow [a, b] = a \cdot b \cdot d \Rightarrow (a, b) | [a, b]$$

بنابراین کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد a, b ، مضرب بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک آن‌هاست که تنها گزینه‌ی ۲ یعنی عدد ۸۴، مضرب ۱۲ است.

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. اعداد دو رقمی مضرب ۵، تصاعد عددی با جمله‌ی اول $a_1 = 10$ و قدرنسبت $d = 5$ تشکیل

می‌دهند. با کمی دقت پی می‌بریم آخرین عدد دو رقمی مضرب ۵، عدد $a_n = 95$ می‌باشد. با معلوم شدن n ، تعداد اعداد دو رقمی مضرب ۵ به دست می‌آید. برای این منظور با توجه به فرمول جمله‌ی عمومی (یعنی a_n) در هر تصاعد عددی، داریم:

بنابراین تعداد اعداد دو رقمی مضرب ۵، هجده عدد می‌باشد.

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \Rightarrow 95 = 10 + (n - 1)5 \Rightarrow n = 18$$

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. ۳۳

$$D = 12 \quad a \cdot b \cdot D = 180 \quad a' \cdot b' = 15 \quad \begin{matrix} a' = 3 & a = 36 \\ b' = 5 & b = 60 \end{matrix} \Rightarrow a + b = 96$$

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. ۳۴

گزینه‌ی «۱»:

$$\left\{ \begin{array}{l} a - b | a + b \xrightarrow{(+)} a - b | 2a \Rightarrow a - b | 4a \\ a - b | a - b \end{array} \right\} \Rightarrow a - b | 4a - 2b$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a - b | a + b \xrightarrow{(-)} a - b | 2b \\ a - b | a - b \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a - b | 2a \xrightarrow{(+)} a - b | 3a - b \\ a - b | a - b \end{array} \right\} \quad \text{گزینه‌ی «۲»}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a - b | 2b \xrightarrow{(-)} a - b | 3b - a \\ a - b | a - b \end{array} \right\} \quad \text{گزینه‌ی «۳»}$$

مثال نقض برای گزینه‌ی «۴»: اگر $a = 5$ و $b = 3$ در نظر گرفته شوند، آن‌گاه:

$$\left. \begin{array}{l} a - b = 2 \\ a + b = 8 \end{array} \right\} \Rightarrow a - b | a + b$$

$$4a + b = 23 \Rightarrow a - b | 4a + b$$

۳۵

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در همنهشتی به پیمانه ۴۳ داریم: $v^n + 42 \equiv 0 \Rightarrow v^n \equiv 1$

$$v^2 = 49 \equiv 6 \Rightarrow v^3 = 42 \equiv -1 \Rightarrow v^6 \equiv 1$$

پس به طور کلی $v^{6k} \equiv 1$ می باشد بنا به فرض $6k < 50$ پس $k \leq 8$ در نتیجه تعداد جواب های عدد طبیعی برابر ۸ می باشد.

۳۶

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با تعیین ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ یا ۵ نقطه، فرضیه ی مورد نظر درست است. ولی با انتخاب ۶ نقطه و شمارش نواحی تشکیل شده، ۳۰ قسمت مجزا درست می شود که مخالفت فرضیه $2^6 = 64$ می باشد.

۳۷

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. می دانیم کوچک ترین عضو مثبت مجموعه ی $\{ax + by : x, y \in \mathbb{Z}\}$ طبق قضیه ی بزو ب.م.م دو عدد a و b یعنی (a, b) است. پس به روش نردبانی، ب.م.م دو عدد ۴۵۱ و ۲۸۷ را حساب می کنیم.

خارج قسمت	۱	۱	۱	۳	
۴۵۱	۲۸۷	۱۶۴	۱۲۳	۴۱	۰
۲۸۷	۱۶۴	۱۲۳	۱۲۳		

$$(451, 287) = 41$$

$$\text{مجموع ارقام} : 4 + 1 = 5$$

۳۸

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$A = \{p, 2p, 3p, \dots\}$$

$$B = \{q, 2q, 3q, \dots\}$$

$$\Rightarrow A \cap B = \{pq, 2pq, \dots\} \Rightarrow \min(A \cap B) = pq$$

شمارنده های طبیعی عدد pq عبارت اند از: ۱ و p و q و pq ، یعنی ۴ شمارنده ی طبیعی دارد. (توجه کنید که چون

$A \cap B \subseteq N$ ، $A \cap B \neq \emptyset$ ، مجموعه ی $A \cap B$ طبق اصل خوش ترتیبی دارای عضو ابتدا است.)

۳۹

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با فرض این که $(a, b) = d$ و $a' = \frac{a}{d}$ و $b' = \frac{b}{d}$ داریم:

$$a \cdot b \cdot d - 11d = a \cdot b \cdot d \stackrel{\div d}{\Rightarrow} a \cdot b \cdot d - 11 = a \cdot b'$$

$$\Rightarrow a \cdot b' \cdot (d - 1) = 11 = 11 \times 1$$

$$\stackrel{(1)}{\Rightarrow} \begin{cases} a \cdot b' = 11 \\ d - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a' = 1 \text{ و } b' = 11 \\ d = 2 \end{cases} \Rightarrow a + b = 2 + 22 = 24$$

$$\stackrel{(2)}{\Rightarrow} \begin{cases} a \cdot b' = 1 \\ d - 1 = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a' = b' = 1 \\ d = 12 \end{cases} \Rightarrow a + b = 12 + 12 = 24$$

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. ۴۰

$$xy - y + x^2 - 3x = 0 \Rightarrow y(x - 1) = 3x - x^2 \Rightarrow y = \frac{x^2 - 3x}{1 - x}$$

برای آن که y مقدار صحیحی باشد باید صورت کسر بر مخرج کسر تقسیم‌پذیر باشد.

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} 1 - x \mid x^2 - 3x \\ 1 - x \mid 1 - x \end{array} \right. \xrightarrow{\times x} 1 - x \mid x - x^2 \xrightarrow{\text{جمع}} 1 - x \mid -2x \\ & \left\{ \begin{array}{l} 1 - x \mid -2x \\ 1 - x \mid 1 - x \end{array} \right. \xrightarrow{\times (-2)} 1 - x \mid 2x - 2 \xrightarrow{\text{جمع}} 1 - x \mid -2 \\ & \Rightarrow \begin{cases} 1 - x = \pm 1 \\ 1 - x = \pm 2 \end{cases} \Rightarrow x = 0, 2, -1, 3 \end{aligned}$$

نقاط زیر روی منحنی مذکور وجود دارند.

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. اگر $p^2 = 2q^2$ باشد، آن‌گاه $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ ، اما چون $p, q \in \mathbb{N}$ ، این امکان ندارد چون $\sqrt{2}$ گویا نیست. پس هیچ مقدار طبیعی برای p و q نداریم. ۴۱

البته دقت کنید که $p = q = 0$ در این معادله صدق می‌کند اما این جواب‌ها جزء اعداد طبیعی نیستند.

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. طبق مثال ۶ صفحه‌ی ۲۰ از کتاب درسی جبر و احتمال، مثال نقض این عبارت مقادیر 2^n است. ۴۲

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. اگر این عدد به فرم $P_1 \times P_2 \times \dots \times P_k + 1$ باشد طبق برهان خلف عددی در بین P_1 تا P_k شمارنده‌اش نیست. ولی چون این عدد زوج است عامل ۲ را دارد. ۴۳

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. ۴۴

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. $a = bq + r$ ۴۵

$$a + 8 = (b + 3)q + (r - 7)$$

$$\text{تفاضل: } 8 = 3q - 7 \rightarrow q = 5$$

$$y = \frac{x^2 + x - 6}{x - 1} = \frac{x^2 - 1 + x - 1 - 4}{x - 1}$$

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. ۴۶

$$= x + 1 + 1 - \frac{4}{x - 1}$$

$$\rightarrow y = x + 2 - \frac{4}{x - 1} \rightarrow x - 1 \mid 4 \text{ باید}$$

$$\text{بنابراین: } \begin{cases} x - 1 = \pm 1 \rightarrow x = 2 \in \mathbb{N} \rightarrow y = 0 \notin \mathbb{N} \\ x - 1 = \pm 2 \rightarrow x = 3 \in \mathbb{N} \rightarrow y = 3 \in \mathbb{N} \\ x - 1 = \pm 4 \rightarrow x = 5 \in \mathbb{N} \rightarrow y = 6 \in \mathbb{N} \end{cases}$$

پس تنها ۲ نقطه با مختصات طبیعی بر این منحنی قرار دارد.

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. ۴۷

$$108a = 2^2 \times 3^2 \times a \quad (a, 6) = 1 \quad \begin{cases} (a, 2) = 1 \\ (a, 3) = 1 \end{cases}$$

بنابراین تعداد مقسوم علیه‌های صحیح عدد $108a$ عبارت است از:

$$2(2+1)(3+1)n = 24n$$

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. ۴۸

$$a = 13b + 43 \quad 0 \leq 43 < b \Rightarrow b \geq 44$$

$$13b + 43 < 1000 \Rightarrow b < \frac{957}{13} = 73 \frac{7}{13} \Rightarrow b \leq 73$$

$$44 \leq b \leq 73 \Rightarrow 73 - 44 + 1 = 30$$

بنابراین:

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. ۴۹

$$7x + 5y = 75 \Rightarrow 7x \equiv 75 \pmod{5} \Rightarrow x \equiv 0 \pmod{5} \Rightarrow x = 5k$$

$$35k + 5y = 75 \Rightarrow y = -7k + 15$$

به ازای $k = 1, 2$ جواب‌های x و y طبیعی‌اند.

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. ۵۰

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 12 \\ 1 \leq x_i \leq 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_1 + x'_2 + x'_3 = 9 \\ 0 \leq x'_i \leq 5 \end{cases}$$

$$\text{کل جواب ها} = \binom{11}{2} - \left(3 \times \binom{5}{2} - 3 \times 0 \right) + \binom{1}{1} = 55 - 30 = 25$$

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. ۵۱

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. ۵۲

$$12x \equiv 7 \pmod{29} \Rightarrow x \equiv 3 \pmod{29} \Rightarrow x = 29K + 3$$

$$12(29K + 3) - 29y = 7 \quad \text{جای‌گذاری } x \text{ در معادله}$$

$$\Rightarrow 29y = 12 \times 29K - 29 \Rightarrow y = 12K - 1$$

$$x + y = (29K + 3) + (12K - 1) = 41K + 2$$

در نتیجه داریم:

$$A = (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 = 3n^2 + 2n = 3n(n+1) \quad \text{گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. ۵۳}$$

حال دقت کنید اگر $n \neq 3k$ باشد آن‌گاه $n^2 = 3k + 1$ بنابراین از بین n و $n^2 + 1$ نیز یکی بر ۳ بخش‌پذیر است یعنی عدد A بر ۹ بخش‌پذیر است.

$$(x^2 + y^2)(a^2 + b^2) = (ax - by)^2 + (ay + bx)^2 \quad \text{گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. کافی است از اتحاد ۵۴}$$

$$p = q = 0 \quad \text{است زیرا در غیر اینصورت داریم: (برهان خلف) ۵۵}$$

$$p^2 = 4q^{\frac{q \neq 0}{2}} \rightarrow \frac{p^2}{q^2} \rightarrow \sqrt{\frac{p^2}{q^2}} = \frac{p}{q}$$

یعنی $\sqrt[2]{4}$ گویا باشد که تناقض است. بنابراین معادله جوابی غیر $p = q = 0$ ندارد.

۵۶ گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$(p-q)(p+q) = c \xrightarrow{\text{اول}} \begin{cases} p-q=1 \Rightarrow 32 \\ p+q=c \end{cases} \Rightarrow p=3, q=2, c=5$$

۵۷ گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$a = 3^7 q + (q^7 - 2) \\ r < 3^7 \Rightarrow q^7 - 2 < 3^7 \Rightarrow |q| < 6 \\ \text{Max } q = 6 \Rightarrow \text{Max } a = 256$$

۵۸ گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$(3a+2, 6a-2) = 2 \Rightarrow d|3a+2 \xrightarrow{\times 2} d|6a+4 \Rightarrow d|6 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } 2 \text{ یا } 3 \text{ یا } 6 \\ d|6a-2 \\ \text{با توجه به این که } 6a-2 \text{ مضرب } 3 \text{ و } 6 \text{ نیست پس } 3 \text{ و } 6 \text{ غیرقابل قبول اند پس تنها } d = 1 \text{ یا } d = 2 \text{ می تواند باشد.}$$

۵۹ گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$A = \{13k + 70 | k \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow A = \text{کمترین عضو مثبت} = 5 \\ 5k \leq 100 \Rightarrow k \leq 20 \Rightarrow k = 1, 2, \dots, 20$$

۶۰ گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. رابطه‌ی زیر از معادله‌ی سیاله به دست می‌آید:

$$(9, 21) | 7n+4 \Rightarrow 3 | 7n+4 \Rightarrow 7n+4 \equiv 3 \pmod{3} \Rightarrow 7n+1 \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow n+1 \equiv 0 \pmod{3} \\ \Rightarrow n+1 = 3k \Rightarrow n = 3k-1 \\ \Rightarrow 10 \leq 3k-1 \leq 20 \Rightarrow 11 \leq 3k \leq 21 \Rightarrow \frac{11}{3} \leq k \leq \frac{21}{3} \Rightarrow 4 \leq k \leq 7$$

بنابراین ۴ مقدار مجزا برای n وجود دارد.

۶۱ گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. بزرگ‌ترین عامل اول $105 = 3 \times 5 \times 7$ ، هفت است، بنابراین فقط گزینه‌ها را به هفت بررسی می‌کنیم که کمترین مقدار عدد ۲۸۰ است.

$$\left[\frac{280}{7} \right] + \left[\frac{280}{7^2} \right] + \left[\frac{280}{7^3} \right] = 40 + 5 + 0 = 45$$

۶۲ گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. ضرایب را تا حد ممکن کوچک می‌کنیم.

$$117a \equiv 87b \Rightarrow 12a \equiv 3b \Rightarrow 4a \equiv b \pmod{4} \text{ گزینه}$$

۶۳ گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. مقسوم علیه‌های مثبت عدد ۱۰ به غیر از ۱ عبارتند از:

$$2, 5, 10$$

معادله جواب ندارد. $a = 2(2, 70) = 2 \mid 9$

معادله جواب ندارد. $a = 5(5, 70) = 5 \mid 9$

$$100 - \left(\left[\frac{100}{2} \right] + \left[\frac{100}{5} \right] - \left[\frac{100}{10} \right] \right)$$

$$100 - (50 + 20 - 10) = 40$$

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. ۶۴

$$3^{200} + \equiv ?$$

$$3^3 \equiv 1 \rightarrow 3^{198} \equiv 1 \rightarrow 3^{200} \equiv 9 \rightarrow 3^{200} + 5 \equiv 13 \equiv 1$$

$$\rightarrow \min a = 5$$

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. ۶۵

گزینه‌ی (۱): اگر قضیه‌ی شرطی «در هر مستطیل، قطرهای برابرند» را در نظر بگیریم، آن‌گاه دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین مثال نقضی برای عکس قضیه‌ی «اگر در یک چهارضلعی قطرهای برابر باشند، آن چهارضلعی مستطیل است.» می‌باشد.

گزینه‌ی (۲): عدد ۱۳ عدد اول است ولی آن را نمی‌توان به صورت $2^n + 1$ یا $2^n - 1$ نوشت.

گزینه‌ی (۴): اگر ۶ نقطه روی دایره را به هم وصل کنیم، ۳۰ ناحیه به دست می‌آید.

گزینه‌ی (۳): هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ قطعاً مضرب ۳ نیست، بنابراین مربع آن را می‌توان به صورت $3k + 1$ نوشت.

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. مثال نقض برای گزینه‌ی (۳) با فرض $p = 2$ و $q = 3$ ، عدد $p + q = 5$ نیز عددی اول است. ۶۶

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} = 16$$

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. اگر x_1 و x_2 ، ریشه‌های این معادله باشند، آن‌گاه:

حالت‌های ممکن برای دو ریشه با فرض $(x_1 \geq x_2)$ ، عبارت است از:

$$x_1 = 16, x_2 = 1 \Rightarrow x_1 + x_2 = 17$$

$$x_1 = 8, x_2 = 2 \Rightarrow x_1 + x_2 = 10$$

$$x_1 = 4, x_2 = 4 \Rightarrow x_1 + x_2 = 8$$

چون مجموع دو ریشه باید عدد اول باشد، تنها حالت اول قابل قبول است. داریم:

$$x_1 + x_2 = P \Rightarrow P = 17$$

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. تعداد صفرهای سمت راست عدد $27!$ برابر است با: ۶۸

$$\left[\frac{27}{5} \right] + \left[\frac{27}{5^2} \right] = 7 + 1 = 8$$

از طرفی می‌دانیم اگر $a = bq + r$ ، آن‌گاه $(a, b) = (b, r)$ ، پس داریم:

$$(a, 6) = (6, 4) = 2$$

پس تعداد صفرهای سمت راست $27!$ ، ۴ برابر $(a, 6)$ است.

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. ۶۹

$$\left. \begin{aligned} d \mid 9n - 1 \\ d \mid n + 2 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} d \mid 19 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } 19 \xrightarrow{d \neq 1} d = 19$$

$$19 \mid n + 2 \Rightarrow n + 2 = 19q \Rightarrow n = 19q - 2 \xrightarrow[n \geq 100]{q=6} n_{\min} = 112$$

پس جمع ارقام این عدد برابر ۴ است.

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. اگر $\sqrt{3}$ گنگ نباشد یک عدد گویا است و دو عدد نسبت به هم اول p, q وجود دارند به ۷۰

طوری که $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$ باشد در نتیجه $P^2 = 3q^2$ پس P مضرب ۳ در ادامه q مضرب ۳ می‌باشد که این برخلاف فرض است.

یعنی از برهان خلف استفاده می‌شود.

yy

برای اثبات نکته‌ی (۲)، حالت‌های ممکن برای باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد a بر 3 را می‌نویسیم:

با توجه به نکته‌ی (۱)، باید $a^2 + 1 \mid 9, 6$ ، یعنی:

با توجه به نکته‌ی (۲)، به‌ازای هیچ مقدار a ، این معادله جواب ندارد.

yy

حال اگر x واحد به مقسوم علیه کنیم طوری که مقسوم و خارج قسمت تغییر نکنند، الگوریتم تقسیم به صورت زیر در می آید:

با توجه به این که طرف اول تساوی‌های (۱) و (۲) با هم برابر هستند، طرف دومشان هم برابرند، یعنی:

یعنی حداکثر دو واحد می‌توان به مقسوم‌علیه اضافه کرد.

راه حل دوم:

یعنی حداکثر میزان افزایش مقسوم‌علیه، دو واحد است.

72

yy

$$a = 5^2 \times 2^1 \times 1 \times 1 \times 2 \times 1 \times 3 \times 3^1 \times 1 \times 1$$

لذا برای ساختن a , ${}^4\times{}^2=8$ حالت انتخاب داریم.

۷۵

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا ۱۸۰۰ را تجزیه می‌کنیم:

$$1800 = 2^3 \times 3^2 \times 5^2$$

چون مقسوم‌علیه‌های ۱۸۰۰ باید از عوامل ۱۸۰۰ تشکیل شوند، پس هر مقسوم‌علیه ۱۸۰۰ عددی به صورت $2^\alpha \times 3^\beta \times 5^\gamma$ است که $0 \leq \alpha \leq 3, 0 \leq \beta \leq 2, 0 \leq \gamma \leq 2$ اما چون مقسوم‌علیه‌های فرد خواسته شده، نباید از ۲ استفاده کنیم. لذا

مقسوم‌علیه‌های قابل قبول عبارتند از: $1, 3, 5, 9, 15, 25, 45, 75$

لذا $2 \times 3 = 6$ مقسوم‌علیه فرد داریم:

نکته: تعداد مقسوم‌علیه‌های عدد $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_k^{\alpha_k}$ عبارتند از:

$$p(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$$

۷۶

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مثال نقض گزینه ۱: $x = 0$ ، برای گزینه ۲: $x = \sqrt{2}, y = 2\sqrt{2}$ و در مورد گزینه ۴ هم عدد ۷۰ است.

اما اثبات گزینه ۳: $x = 2k, y = 2k' \Rightarrow x^2 + y^2 = 4k^2 + 4k'^2 = 4(k^2 + k'^2) = 4k_1$

۷۷

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. گزینه‌های ۱، ۲ و ۴ را فقط از طریق برهان خلف می‌توان اثبات کرد. اما در گزینه ۳ با توجه به این که باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد N بر $2, 3, \dots, p$ برابر یک است. پس N بر هیچ‌کدام از این اعداد تقسیم‌پذیر نمی‌باشد، لذا یا اول است یا مرکب است و عامل اولش بین ۲ تا p نیست، لذا عامل اولی دارد که بزرگ‌تر از p است.

۷۸

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$9 \equiv -1$$

$$(654321)_9 = 6 \times 9^5 + 5 \times 9^4 + 4 \times 9^3 + 3 \times 9^2 + 2 \times 9^1 + 1 = 6 + 5 - 4 + 3 - 2 + 1 = -3 \Rightarrow -3 \equiv 6$$

۷۹

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اثبات درستی گزینه ۳ (به روش اثبات بازگشتی می‌باشد).

$$a^2 + \frac{1}{a^3} \leq -2 \xrightarrow{\times a^3} a^5 + 1 \geq -2a^3 \Leftrightarrow a^5 + 2a^3 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (a^2 + 1)^2 \geq 0$$

۸۰

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. همواره مربع عدد طبیعی فرد به صورت $8k+1$ است و نقضی ندارد.

مثال نقض گزینه ۱ اعداد 2^n است.

مثال نقض گزینه ۲ اعداد $8k+7$ است.

مثال نقض گزینه ۴ اعداد $n \geq 6$ است.

۸۱

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$7^{100} \equiv 1^4 \pmod{14} = 2 \times 7, (2, 7) = 1$$

پس می‌توانیم باقی‌مانده‌ی 7^{100} را بر ۲ و بر ۷ جداگانه به دست آوریم و سپس از رابطه‌ی زیر استفاده کنیم.

$$\left. \begin{matrix} a \equiv b \pmod{m} \\ a \equiv b \pmod{n} \end{matrix} \right\} \Rightarrow a \equiv b \pmod{[m,n]}$$

$$7 \equiv 1 \pmod{14} \Rightarrow 7^{100} \equiv 1^{100} \pmod{14} \Rightarrow 7^{100} \equiv 1 \pmod{14} \Rightarrow 7^{100} \equiv 7 \pmod{14} \quad (1)$$

$$7 \equiv 0 \pmod{7} \Rightarrow 7^{100} \equiv 0^{100} \pmod{7} \Rightarrow 7^{100} \equiv 0 \pmod{7} \Rightarrow 7^{100} \equiv 7 \pmod{7} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow 7^{100} \equiv 7 \pmod{14}$$

۸۲ گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$50 \equiv -1 \Rightarrow -x \equiv 1 \Rightarrow x \equiv -1$$

$$x = 17k - 1 \Rightarrow 17k - 1 \leq 99 \Rightarrow k \leq \frac{100}{17} \cong 5/8$$

$$\max(k) = 5$$

$$\max(x) = 17(5) - 1 = 84 \xrightarrow{\text{جمع ارقام}} 8 + 4 = 12$$

۸۳ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. طرفین تساوی بر ۲۳ بخش‌پذیر است.

$$15r + 4S = 1 \Rightarrow r = -1, S = 4$$

پس خواهیم داشت $r = 4K - 1$ و $S = -15K + 4$ در نتیجه $r + S = -11K + 3$ بزرگ‌ترین عدد منفی به‌ازای $K = 1$ برابر ۸- می‌باشد.

۸۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. از روابط هم‌نهشتی استفاده می‌کنیم.

$$2^5 = 32 \equiv -2 \pmod{17}$$

$$2^{25} \equiv -32 \equiv 2 \Rightarrow 2^{50} \equiv 4 \Rightarrow 2^{50} + a \equiv 4 + a \pmod{17}$$

پس $a = 13$.

۸۵ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$8a \equiv 64 \pmod{12} \Rightarrow 8a - 64 = 12k' \Rightarrow 2a - 16 = 3k'$$

$$a - 8 = 3k \Rightarrow a + 1 - (9) = 3k$$

پس از ساده‌کردن داریم:

در نتیجه $a + 1$ بر ۳ بخش‌پذیر است یا $a + 1 = 3k$

۸۶ گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

مثال نقض برای گزاره‌ی فوق، عبارتی است که حاصل ضرب ارقامش بر ۸ بخش‌پذیر بوده ام خودش بر ۸ قابل قسمت نباشد. مانند گزینه‌ی «۴» که حاصلضرب ارقام آن مضرب ۸ بوده ولی خود ۱۲۴ مضرب ۸ نیست.

۸۷ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

اعداد اول کوچک‌تر از ۳۰ عبارت‌اند از: ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۷، ۱۹، ۲۳ و ۲۹ که شامل ۱۰ عدد است. اگر اعداد کوچک‌تر از ۳۰ را به ۴ دسته تقسیم کنیم، ثابت می‌کنیم حداقل در یکی از دسته‌ها ۳ عدد اول وجود دارد. اثبات به روش برهان خلف: فرض کنیم در هر ۴ دسته کمتر از ۳ عدد وجود دارد، بنابراین در هر دسته حداکثر ۲ عدد اول وجود دارد، پس باید حداکثر $4 \times 2 = 8$ عدد اول کوچک‌تر از ۳۰ داشته باشیم که این تناقض است.

۸۸ گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. در گزینه‌ی (۴) داریم:

$$a|b \Rightarrow a^r|b^r \Rightarrow a^r|b^r \times b \Rightarrow a^r|b^r \Rightarrow a^r|b^r \times -1 \Rightarrow a^r|-b^r$$

۸۹ گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$9^{35} + n \equiv 0$$

$$9^{18} \equiv 1 \Rightarrow 9^{36} \equiv 1 \Rightarrow 9^{35} \equiv -1 \Rightarrow -1 + n \equiv 0 \Rightarrow n = 19K + 2$$

$n \Rightarrow K = 1, 2, 3, 4, 5$ دورقمی است

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۹۰

$$(7x^2, 2 \times 3^2 \times 5 \times 7) = 7(x^2, 2 \times 3^2 \times 5) = 7 \Rightarrow \text{فقط یک مقدار دراد}$$

$$\begin{cases} (x, 5) = 1 \\ (x, 2) = 1 \\ (x, 3) = 1 \end{cases} \Rightarrow (x^2, 2 \times 3^2 \times 5) = 1$$

طبق قضیه بزو:

$$a^r | b^s \Rightarrow a^r | b^t \Rightarrow a | b^r \Rightarrow a^r | b^r \Rightarrow a^r | b^s$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۹۱

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۹۲

$$n! \text{ در تجزیه } p \text{ توان عامل اول } p = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \dots$$

$$\left. \begin{aligned} 802! \text{ در } 7 \text{ توان} &= \left\lfloor \frac{802}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{802}{49} \right\rfloor + \dots = 114 + 16 + 2 + 1 = 133 \\ 802! \text{ در } 3 \text{ توان} &= \left\lfloor \frac{802}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{802}{9} \right\rfloor + \dots = 267 + 89 + 30 + 11 + 4 + 1 = 392 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 802! = 2^{392} \times 3^{267} \times \dots$$

$$\left. \begin{aligned} 3x \leq 78 &\Rightarrow x \leq \frac{78}{3} = 26 \\ 2x \leq 36 &\Rightarrow x \leq \frac{36}{2} = 18 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x \leq 18$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اگر $N = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$ $(P_i \text{ ها اعداد اول})$ باشد. ۹۳

$$N \text{ طبیعی} = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$$

$$N \text{ مقسوم علیه های صحیح} = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$$

$$\left. \begin{aligned} a | 1080 \\ 12 || \Rightarrow a = 12q \end{aligned} \right\} \Rightarrow 12q | 1080 \Rightarrow q | \frac{1080}{12} = 90 = 2 \times 3^2 \times 5$$

$$90 \text{ تعداد مقسوم علیه های طبیعی} = 2 \times 3 \times 2 \times 12$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۹۴

$$42 = 1 + 16 + 25, 24 = 4 + 4 + 16, 61 = 9 + 16 + 36$$

عدد ۲۸ را نمی توان به صورت مجموع سه عدد مربع کامل نوشت پس کلیت حکم را نقض می کند.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر عدد را a فرض کنیم، آن گاه $a - 2$ بر $3, 4, 5, 7$ بخش پذیر است. لذا بر حاصل ضرب آنها ۹۵

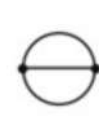
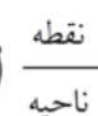
$$a - 2 = (3 \times 4 \times 5 \times 7)k \Rightarrow a - 2 = 420k$$

نیز بخش پذیر است، بنابراین:

$$a = 840 + 2 = 842 \quad \text{از آن جایی که } 800 \leq a \leq 900 \text{ پس } k = 2 \text{ و از آن جا:}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. این حکم برای $n = 1, 2, 3, 4, 5$ درست است و از $n = 6$ به بعد نقض می شود. (مثال کتاب ۹۶

درسی)

						$\begin{array}{c ccccc} \text{نقطه} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline \text{ناحیه} & 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \end{array}$
---	---	---	---	---	---	--

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در اثبات قضیه با برهان خلف، ابتدا خلاف حکم را فرض می کنیم، سپس به تناقض برخورد ۹۷

می کنیم، در نتیجه فرض اولیه رد می شود، این مهم در مورد مجموع زوایای خارجی n ضلعی محدب برابر ۴ قائمه است، ممکن نیست.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. بنابر قانون تقسیم داریم:

$$\begin{cases} a = bq + q; q < b \\ a = (b-3)(q+5) \end{cases} \Rightarrow bq + q = bq - 3q + 5b - 15$$

پس $4q = 5(b-3)$ مقدار q بر ۵ بخش پذیر است با شرط $q < b$ خواهیم داشت $q = 5, 10$.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. a و b اعداد و فرد هستند و مربع هر عدد فرد به فرم $8k+1$ نوشته می شود.

$$a^2 = 8k+1, b^2 = 8k'+1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8|b^2-1 \\ 8|a^2-1 \end{cases} \Rightarrow 8|b^2-a^2 \Rightarrow \text{پس این رابطه همیشه برقرار است}$$

و n هر عدد صحیحی می تواند باشد.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. گزینه (۱): مثال نقض: $y=0, x=\sqrt{2}$

$$\text{گزینه (۳): مثال نقض: } x = \frac{3}{2} + \sqrt{2}$$

$$\text{گزینه (۴): مثال نقض: } x = 2/5$$

$$\left. \begin{matrix} x = \frac{a}{b} \\ y = \frac{c}{d} \end{matrix} \right\} \Rightarrow x+y = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \in \mathbb{Q} \quad \text{اثبات گزینه (۲):}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. گزینه (۱) با اصل تقسیم هم نهشتی برقرار است یعنی:

$$20x \equiv 36y \Rightarrow \frac{20x}{4} \equiv \frac{36y}{4} \Rightarrow 5x \equiv 9y$$

$$20x \equiv 36y \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{5/20} 20x \equiv 36y \Rightarrow 36y \equiv 0 \Rightarrow y \equiv 0 \\ \xrightarrow{2/20} 20x \equiv 36y \Rightarrow 20x \equiv 0 \Rightarrow x \equiv 0 \end{cases}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به این که $(15, 14) = 1$ ، معادله در مجموعه اعداد صحیح جواب دارد. یک جواب

دل خواه برای معادله $(700, 0)$ است، پس:

$$\begin{cases} x = 700 + 14k \\ y = 0 - 15k \end{cases} \Rightarrow x, y \in \mathbb{N} \begin{cases} 700 + 14k > 0 \\ -15k > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{-700}{14} < k < 0 \Rightarrow -50 < k < 0$$

k دارای ۴۹ مقدار است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. دو عدد مورد نظر را a و b و b م م آن ها را d می نامیم بنابراین $a = a'd$ و $b = b'd$ که در آن

$$(a', b') = 1$$

$$a+b=180 \Rightarrow 1a'+10b'=180 \Rightarrow a'+b'=18$$

$$(a', b') = 1 \Rightarrow \{a', b'\} = \{1, 17\} \text{ یا } \{5, 13\} \text{ یا } \{7, 11\}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

نکته: اگر $ac \equiv bc \pmod{m}$ و $d = (m, c)$ ، آن گاه $b \equiv a \pmod{\frac{m}{d}}$.

$$7x - 5y = 12 \Rightarrow 7x - 5y \equiv 12 \pmod{12} \xrightarrow{-5 \equiv 7} 7x + 7y \equiv 12 \pmod{12} \xrightarrow{\div 7} x + y \equiv 1 \pmod{12}$$

$$x+y \equiv 1 \pmod{12} \Rightarrow x+y \in [1]_{12}$$

$$24x \equiv 6 \pmod{15} \xrightarrow{\div 6} 4x \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow -x \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow x \equiv -1 \pmod{5} \Rightarrow x = 5k - 1$$

باید تعداد k هایی را بیابیم که به ازای آن‌ها $10 \leq x \leq 99$ است.

$$10 \leq 5k - 1 \leq 99 \Rightarrow 11 \leq 5k \leq 100 \Rightarrow \frac{11}{5} \leq k \leq 20 \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k = 3, 4, \dots, 20$$

$$\Rightarrow \text{تعداد} = 20 - 3 + 1 = 18$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۰۶

نکته: اگر n یک عدد مرکب باشد، آن‌گاه n حداقل یک مقسوم‌علیه اول کوچک‌تر یا مساوی $\sqrt{n}$ دارد.

با توجه به نکته بالا، باید تمام مضارب اعداد اول کوچک‌تر از $\sqrt{100} = 10$ ، یعنی مضارب اعداد ۲، ۳، ۵ و ۷، یعنی مضارب اعداد ۲، ۳، ۵ و ۷ حذف شوند.

بنابراین گزینه ۳ پاسخ است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نکته: خارج‌قسمت تقسیم a بر b ، برابر $\left[\frac{a}{b}\right]$ است. ۱۰۷

با توجه به نکته‌ی بالا، داریم:

$$\left[\frac{400}{b}\right] = 13 \Rightarrow 13 \leq \frac{400}{b} < 14 \Rightarrow \frac{400}{14} < b \leq \frac{400}{13}$$

$$28/\dots < b \leq 30/\dots \xrightarrow{b \in \mathbb{Z}} \min(b) = 29$$

بنابراین رقم یکان کوچک‌ترین مقدار ممکن برای b ، برابر ۹ است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۰۸

نکته: $(a^n, b^n) = (a, b)^n$ ، $(ka, kb) = k(a, b)$ ، $(-a, b) = (a, b)$

با استفاده از نکته‌ی بالا داریم:

$$\underbrace{(a^7, a^7 + b^7)}_{(a^7, b^7)} = (-a, b) + 12 \Rightarrow (a, b)^7 = (a, b) + 12$$

با فرض $d = (a, b)$ داریم:

$$d^7 - b - 12 = 0 \Rightarrow (d - 4)(d + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} d = 4 \\ d = -3 < 0 \text{ غ ق} \end{cases}$$

بنابراین:

$$(3a^7, 3b^7) = 3(a, b)^7 = 3d^7 = 48$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۰۹

نکته: $[a, b, c] = [[a, b], c]$

نکته: اگر $a \mid b$ ، آن‌گاه $(a, b) = a$ و $[a, b] = b$

$$7ab + 5c = 1 \Rightarrow (ab, c) = 1 \Rightarrow \begin{cases} (a, c) = 1 \\ (b, c) = 1 \end{cases}$$

$$a \mid c(a + b) \xrightarrow{(a, c) = 1} a \mid a + b \xrightarrow{a \mid a} a \mid b$$

$$[a, b, c] = [[a, b], c] \xrightarrow{a \mid b} [b, c] = \frac{|bc|}{(b, c)} \xrightarrow{(b, c) = 1} |bc|$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نکته: اعداد به فرم 2^n را نمی‌توان به صورت مجموع چند عدد طبیعی متوالی نوشت.
نکته: اعداد بین صفر و یک، هر چه به توان بزرگ‌تری برسند، کوچک‌تر می‌شوند.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 < \left(\frac{1}{2}\right)^3 : a = \frac{1}{2}$$

مثال نقض ب) $a = 8$

مثال نقض پ) $a = 6$: 6^2 مضرب ۱۲ است، ولی ۶ مضرب ۱۲ نیست.

بنابراین هر ۳ مورد دارای مثال نقض هستند. پس گزینه‌ی ۳ پاسخ است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

طبق فرض داریم:

$$\begin{aligned} 8^2 + 9^2 + \dots + 15^2 &= (1^2 + 2^2 + \dots + 15^2) - (1^2 + 2^2 + \dots + 7^2) \\ &= \left(\frac{15 \times 16}{2}\right)^2 - \left(\frac{7 \times 8}{2}\right)^2 = (15 \times 8)^2 - (7 \times 4)^2 \\ &= (120)^2 - (28)^2 = 14400 - 784 = 13616 \end{aligned}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. عضو ابتدای این مجموعه باقیمانده ۱۰۰ بر ۶ است.

$$\begin{array}{r} -100 \\ +102 \quad | \quad -17 \\ \hline 2 \end{array} \quad q = \left[\frac{-100}{6} \right] = -17$$

$$\Rightarrow r = 2 \Rightarrow \text{Min}(S) = 2$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} 8a + 3 &\equiv 7a + 6 \Rightarrow a \equiv 3 \\ a^4 - a^2 + a + 5 &\equiv 3^4 - 3^2 + 3 + 5 \equiv 81 - 9 + 3 + 5 \equiv 80 \equiv 0 \end{aligned}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} -1 &\equiv -(1-13)! : \text{طبق قضیه‌ی ویلسون} \\ \Rightarrow -x &\equiv 2 \Rightarrow x \equiv -2 \Rightarrow x = 13k - 2 \\ k = 2 &\Rightarrow x = 24 \end{aligned}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر عدد طبیعی n مضرب ۳ نباشد، مربع آن به صورت $3k+1$ است. بنابراین، برای

این که مجموع مربعات اعدادی که مضرب ۳ نیستند بر ۳ بخش‌پذیر باشد، باید تعداد آن‌ها مضرب ۳ یعنی ۰ یا ۳ یا ۶ باشد. در این صورت حداقل تعداد اعدادی که مضرب ۳ هستند برابر $2 = 6 - 8$ خواهد بود.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ 12^2 + 14^2 + 16^2 + \dots + 30^2 &= 2^2(6^2 + 7^2 + \dots + 15^2) \\ &= 4 \left[(1^2 + 2^2 + \dots + 15^2) - (1^2 + \dots + 5^2) \right] = 4 \left[\frac{15 \times 16 \times 31}{6} - \frac{5 \times 6 \times 11}{6} \right] = 4740 \end{aligned}$$

۱۱۷

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. حاصل ضرب n عدد صحیح متوالی همواره بر $n!$ بخش پذیر است. پس حاصل ضرب چهار عدد صحیح متوالی همواره بر $24 = 4!$ بخش پذیر است. در واقع به کمک مثال نقض می توان گفت به طور مثال حاصل ضرب $24 = 4 \times 3 \times 2 \times 1$ بر ۱۶ بخش پذیر نیست.

۱۱۸

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$27 \equiv 1 \Rightarrow (27)^{1397} \equiv 1^{1397} = 1 \quad (1)$$

$$2620 \equiv 7(2) \rightarrow (27)^{1397} + 2620 \equiv 1 + 7 = 8$$

۱۱۹

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. عددی بر ۳ بخش پذیر است که مجموع ارقام آن بر ۳ بخش پذیر باشد.

$$aa \mid ba \mid abaa \equiv 0 \Rightarrow a + a + 1 + b + a + 1 + a + b + a + a \equiv 0$$

$$6a + 2b + 2 \equiv 0 \xrightarrow{3 \mid 6a} 2b + 2 \equiv 0 \Rightarrow 2b \equiv -2 \equiv 1$$

$$\Rightarrow 2b = 3k + 1 (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow \begin{cases} k=1 \Rightarrow b=2 \\ k=3 \Rightarrow b=5 \\ k=5 \Rightarrow b=8 \end{cases}$$

به ازای مقادیر دیگر k ، برای b مقادیری به دست می آید که به عنوان رقم قابل قبول نمی باشند.

۱۲۰

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

نکته: در روش برهان خلف، فرض می کنیم که حکم نادرست باشد. سپس با استفاده از قوانین منطق گزاره ها و دنباله ای از استدلال های درست و مبتنی بر فرض، به یک نتیجه ی غیرممکن یا متضاد با فرض می رسیم و از آنجا نتیجه می گیریم که فرض نادرست بودن حکم، باطل است و حکم درست است.

هر یک از گزینه ها را بررسی می کنیم:

گزینه ۱: در کتاب به روش برهان خلف اثبات شده است.

گزینه ۲: اگر a گنگ باشد، گویا است، در نتیجه a^2 نیز گویاست که با فرض تناقض دارد. پس حکم درست است.

گزینه ۳: اگر a مضرب ۳ باشد، یعنی $a = 3k$ ، آنگاه $a^2 = 9k^2 = 3(3k^2) = 3k$ نیز مضرب ۳ است.

گزینه ۴: اگر $\frac{5}{a}$ گنگ نباشد، گویاست و از آنجا که حاصل تقسیم دو عدد گویای ناصفر همواره گویاست، پس $\frac{5}{\frac{5}{a}} = a$

نیز گویاست که با فرض در تناقض است، پس حکم درست است.

بنابراین اثبات گزینه ی ۳ به برهان خلف نیاز ندارد.

۱۲۱

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

نکته: می گوییم دو عدد صحیح a و b در پیمانه ی عدد طبیعی m با هم همنهشت هستند و می نویسیم $a \equiv b^m$ ، اگر و فقط

$$a \equiv b^m \Leftrightarrow m \mid (a - b)$$

با توجه به نکته ی بالا، دو عدد در صورتی در پیمانه ی ۷ همنهشت هستند که تفاضلشان بر ۷ بخش پذیر باشد. پس هر

یک از گزینه ها را بررسی می کنیم:

$$\text{گزینه ۱: } 72 - 6 = 66; 7 \nmid 66 \times$$

$$\text{گزینه ۲: } -12 - (-27) = 15; 7 \nmid 15 \times$$

$$\text{گزینه ۳: } 6 - (-43) = 49; 7 \mid 49$$

$$\text{گزینه ۴: } -4 - 32 = -36; 7 \nmid -36 \times$$

بنابراین گزینه ی ۳ پاسخ است.



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۲۲

$$1^9 p + 1 = k^9 \Rightarrow 1^9 p = k^9 - 1 = (k-1)(k+1)$$

حال دو حالت اتفاق می‌افتد:

$$\begin{cases} k-1 = 1^9, k+1 = p \Rightarrow k = 20 \Rightarrow p = 21 \\ k-1 = p, k+1 = 1^9 \Rightarrow k = 18 \Rightarrow p = 17 \end{cases}$$

پس به ازای تنها یک عدد اول، عدد $1^9 p + 1$ مربع کامل می‌شود.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۲۳

$$b \mid a + 12$$

چون a فرد است، $a + 12$ نیز فرد است، پس مقسوم‌علیه‌های آن نیز فرد هستند. مربع هر عدد فرد به صورت $8k + 1$ است، پس داریم:

$$a^2 + b^2 + 19 = 8k + 1 + 8k' + 1 + 19 = 8k + 8k' + 21 = 8k + 8k' + 16 + 5$$

$$= 8(k + k' + 2) + 5 = 8k'' + 5 \Rightarrow \text{باقی‌مانده‌ی تقسیم بر ۸، ۵ است.}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۲۴

$$ma + nb = 1 \Rightarrow (a, b) = 1, a \mid bc \Rightarrow a \mid c$$

چون عدد c بر عدد a بخش‌پذیر است پس کوچکترین مضرب مشترک آن‌ها $|c|$ است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۲۵

در حاصل ضرب عضوهای مجموعه $\{1, 2, \dots, 50\}$ تعداد اعداد مضرب‌های $3, 9, 27$ به ترتیب

$$\left\lfloor \frac{50}{27} \right\rfloor = 1, \left\lfloor \frac{50}{9} \right\rfloor = 5, \left\lfloor \frac{50}{3} \right\rfloor = 16$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. رابطه $a^r \mid b^s \Rightarrow a^m \mid b^n$ زمانی درست است که $\frac{s}{r} \leq \frac{n}{m}$. این شرط تنها در گزینه (۲) برقرار

است:

$$۱) \frac{5}{3} > \frac{1}{1}$$

$$۲) \frac{5}{3} \leq \frac{4}{2}$$

$$۳) \frac{5}{3} > \frac{6}{4}$$

$$۴) \frac{5}{3} > \frac{3}{2}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۲۷

گزاره «الف» نادرست است زیرا اگر $x = 0$ باشد، آن‌گاه هیچ y وجود ندارد که $xy = 1$ شود.

گزاره «ب» درست است زیرا هر عدد صحیح یک قرینه دارد.

گزاره «ج» درست است، کافی است x را صفر در نظر بگیریم.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۲۸

نکته: اگر x گویا و y گنگ باشد، اعداد $x \pm y$ و $\frac{y}{x}$ قطعاً گنگ هستند، اما برای گنگ بودن xy و $\frac{x}{y}$ مثال نقض $x = 0$ وجود

دارد. با توجه به نکته، برای گزینه‌ی ۳ مثال نقض $x = 0$ وجود دارد.

$$xy \stackrel{x=0}{=} 0 \times y = 0 \in \mathbb{Q} \text{ گویا}$$

پس گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

نکته: اثبات با استفاده از تعاریف، مفاهیم، اصول اولیه و قضایای شناخته شده را اثبات به روش مستقیم می‌گوییم.
گزینه‌های ۱، ۲ و ۳ در کتاب درسی به کمک برهان خلف اثبات شده‌اند، اما اثبات گزینه‌ی ۴ به روش مستقیم صورت می‌پذیرد:

$$\begin{cases} x = \frac{a}{b}; a, b \in \mathbb{Z} \text{ و } b \neq 0 \\ y = \frac{c}{d}; c, d \in \mathbb{Z} \text{ و } d \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x + y = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

چون $bd \neq 0$ ، $bd + bc$ ، $bd \in \mathbb{Z}$ پس $x + y$ عددی گویا است.

نکته: اگر گزاره‌ی مرکب دشرطی $p \Leftrightarrow q$ درست باشد، گزاره‌های p و q هم‌ارز هستند.

نکته: برای اثبات درستی یک گزاره، گزاره‌های هم‌ارز با آن را در نظر می‌گیریم و به کمک قوانین ریاضی به گزاره‌ی اصلی می‌رسیم. معمولاً این کار به جهت ساده‌تر شدن اثبات استفاده می‌شود که به آن روش بازگشتی می‌گوییم. در روش بازگشتی، خود عبارت حکم را ساده می‌کنیم تا به یک عبارت همیشه درست هم‌ارز با آن برسیم و در این صورت همه‌ی مراحل بازگشت‌پذیر هستند. با توجه به نکته‌ی بالا برای عبارت صورت سؤال داریم:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \xLeftrightarrow[\frac{x \times xy}{xy > 0}] x^2 + y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)^2 \geq 0$$

پس گزینه‌ی ۱ پاسخ است.

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow 2xy = 0$$

$$\Rightarrow xy = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0$$

در بین گزینه‌ها، فقط گزینه‌ی ۲ قطعاً برابر صفر است و گزینه‌های ۱، ۳ و ۴ می‌توانند صفر نباشند.

$$2x^2y + 3xy^2 \stackrel{(x=0 \vee y=0)}{=} 0 + 0 = 0$$

$$17 = 9 + 4 + 4$$

$$18 = 16 + 1 + 1$$

$$11 = 9 + 1 + 1$$

فقط گزینه‌ی (۴) را نمی‌توان به صورت مجموع سه مربع کامل از اعداد طبیعی نوشت.

اعداد از صفر تا ۹۹۹: $\boxed{10} \boxed{10} \boxed{10} = 10^3 \rightarrow$ تعداد اعداد حداکثر ۳ رقمی حسابی

تعداد اعداد ۷ رقمی: $\boxed{9} \boxed{10} \boxed{10} \boxed{10} \boxed{10} \boxed{10} \boxed{10} = 9 \times 10^6$

$$\Rightarrow \frac{9 \times 10^6}{10^3} = 9 \times 10^3 = 9000$$

گزینه (۲) نادرست است، زیرا در حالتی که a و b فرد هستند، آنگاه $2a - b$ عددی فرد است.

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \mid 13n + 3 \xrightarrow{\times 7} \alpha \mid 91n + 21 \\ \alpha \mid 7n + 4 \xrightarrow{\times 12} \alpha \mid 84n + 48 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} \alpha \mid 31 \xrightarrow{\alpha > 1} \alpha = 31$$

$$\begin{array}{l} 31 \mid 7n + 4 \Rightarrow 7n + 4 \equiv 0 \Rightarrow 7n \equiv -4 \Rightarrow 7n \equiv -4 - 31 \equiv -35 \\ \xrightarrow{\div 7} n \equiv -5 \Rightarrow n = 31k - 5 \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ (7, 31) = 1 \end{array}$$

کوچکترین عدد طبیعی n به ازای $k = 1$ حاصل می‌شود که برابر ۲۶ است و مجموع ارقام آن برابر ۸ می‌باشد.

$$\begin{array}{l} 9x + 13y = 725 \Rightarrow 13y \equiv 725 \Rightarrow 4y \equiv 5 \equiv -1 \\ \xrightarrow{\div 4} y \equiv -1 \Rightarrow y = 9k - 1 \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ (4, 9) = 1 \end{array}$$

$$9x + 13(9k - 1) = 725 \Rightarrow 9x = -117k + 738 \Rightarrow x = -13k + 82$$

$$\left. \begin{array}{l} x > 0 \Rightarrow -13k + 82 > 0 \Rightarrow k < \frac{82}{13} \\ y > 0 \Rightarrow 9k - 1 > 0 \Rightarrow k > \frac{1}{9} \end{array} \right\} \Rightarrow 1 \leq k \leq 6$$

یعنی این معادله سیاله دارای ۶ دسته جواب طبیعی است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. شرط وجود جواب برای معادله $mx + 3^k y = 2^4$ آن است که $(m, 3^k) \mid 2^4$ ، با توجه به آن که $3^2 = 2^2 \times 3$ و $3^6 = 2^2 \times 3^2$ ، پس معادله در صورتی فاقد جواب است که m مضرب ۹ (دارای دو عامل ۳) باشد.

$$10 \leq 9k \leq 99 \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} 2 \leq k \leq 11 \quad \text{داریم:}$$

۱۰ مقدار طبیعی برای k وجود دارد، بنابراین به ازای ۱۰ عدد طبیعی دو رقمی m ، معادله سیاله $mx + 3^k y = 2^4$ فاقد جواب در مجموعه اعداد صحیح است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. حاصل جمع یک عدد گنگ با یک عدد گویا همواره گنگ است.

برای رد گزینه‌های دیگر:

عددی گویا است $\alpha = 0 \Rightarrow \alpha\beta = 0$

عددی گویا است $\beta = \sqrt{2}, \alpha = 1 \Rightarrow \alpha + \beta^2 = 1 + 2 = 3$

عددی گویا است $\beta = \sqrt{3}, \alpha = 1 \Rightarrow \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{1 + 3} = 2$

$$423x \equiv 79 \Rightarrow 5x \equiv 2 \Rightarrow 5x \equiv 2 + 3 \times 11 \Rightarrow 5x \equiv 35 \Rightarrow x \equiv 7 \Rightarrow a = 7$$

$$8x \equiv 20 \Rightarrow 2x \equiv 5 \Rightarrow 2x \equiv 5 + 3 \Rightarrow 2x \equiv 8 \Rightarrow x \equiv 4 \Rightarrow b = 1$$

$$a - b = 7 - 1 = 6$$

نکته: اگر $a \equiv b \pmod{m}$ و $c \equiv d \pmod{m}$ آن گاه $a + c \equiv b + d \pmod{m}$

۱۴۰

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. موارد الف و ب صحیح می‌باشند و مورد ج غلط است. زیرا اگر x عدد صفر باشد عدد xy گویا می‌شود.

$$k = a(a+1) = a^2 + a \Rightarrow 4k+1 = 4a^2 + 4a + 1 = (2a+1)^2 \quad (\text{الف})$$

$$n^2 - n = n(n-1) = (n-1)n(n+1) \quad (\text{ب})$$

ضرب سه عدد صحیح متوالی مضرب ۶ است.

۱۴۱

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. گزاره‌ی داده شده نادرست است و درستی آن با مثال نقض $n=5$ رد می‌شود.

$$N = 43 \times q + q \quad q < 43 \Rightarrow N < 1892$$

$$\Rightarrow N = 44q$$

۱۴۲

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{array}{l} N \equiv 0 \pmod{44} \\ N \equiv 26 \pmod{44} \end{array} \right\} \Rightarrow N \equiv 1364 \pmod{44} \Rightarrow N = 1364k + 11 \Rightarrow N_{\max} = 1452$$

۱۴۳

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$(221, 357) = 17 \Rightarrow 221x + 357y = 17 \Rightarrow 13x + 21y = 1 \Rightarrow 13x \equiv 1 \pmod{21} \Rightarrow -8x \equiv 1 \pmod{21} \Rightarrow -20x \equiv 1 \pmod{21}$$

$$\Rightarrow 2x \equiv 5 \pmod{21} \Rightarrow x \equiv 13 \pmod{21} \Rightarrow x \in \{13, 34, 55, 76, 97\}$$

۱۴۴

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{array}{l} 3a+b \mid a+5b \\ 3a+b \mid 3a+b \end{array} \right\} \begin{array}{l} \times (-1) \\ \times 2 \end{array} \Rightarrow 3a+b \mid 5a-2b$$

برای سایر گزینه‌ها مثال نقض $a=1$ و $b=4$ وجود دارد.

۱۴۵

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر n را ۱ در نظر بگیرید حاصل عبارت داده شده صفر شده و گزینه‌ی ۱ رد می‌شود.

اگر n را ۲ قرار داده و a_1 و b_1 را مساوی هم و a_2 و b_2 را مساوی هم در نظر بگیریم آن‌گاه حاصل عبارت داده شده صفر شده و گزینه‌ی ۳ رد می‌شود و در همین حالت اگر یکی از دو عدد a_1 و a_2 فرد و دیگری زوج بوده و b_2 برابر a_1 و نیز b_1 برابر a_2 باشد آن‌گاه هر دو پرانتز $(a_1 - b_1)$ و $(a_2 - b_2)$ فرد شده و حاصل ضربشان نیز فرد خواهد بود که با این شرایط گزینه‌ی ۴ نیز رد می‌شود.

۱۴۶

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$a \mid 11k+4 \Rightarrow a \mid 11(11k+4) - 11(7k-1) \rightarrow a \mid 39 \xrightarrow{a \text{ اول است}} a_{\max} = 13$$

به ازای $k=2$ مقدار $a=13$ به دست می‌آید.

۱۴۷

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$y = \frac{2x-1}{x+2} \in \mathbb{Z}$$

$$\text{از طرفی} \begin{cases} x+2 \mid 2x-1 \\ x+2 \mid x+2 \end{cases} \Rightarrow x+2 \mid 7 \Rightarrow x+2 = \pm 1, \pm 7$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2=1 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow y=-4 \\ x+2=-1 \Rightarrow x=-3 \Rightarrow y=10 \\ x+2=7 \Rightarrow x=5 \Rightarrow y=2 \\ x+2=-7 \Rightarrow x=-9 \Rightarrow y=4 \end{cases}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۴۸

$$91 = 7 \times 13 \Rightarrow (91, 65) = 13$$

$$65 = 5 \times 13$$

$$91x + 65y = 13 \Rightarrow 7x + 5y = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 + 5k \\ y = 3 - 7k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$y - x = 5 - 12k \Rightarrow y - x \equiv 5 \Rightarrow (y - x)^2 \equiv 25 \equiv 1$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۵۰}} (y - x)^{100} \equiv 1$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۴۹

می‌دانیم اگر a فرد باشد، $a^2 \equiv 1$ برقرار است.

$$n^3 - n = n(n-1)(n+1) \equiv 0$$

ضرب ۳ عدد متوالی مضرب ۳!

برای اثبات گزینه (۲) داریم:

$$a^2 \equiv b \rightarrow a, b \Rightarrow 2|a+b, 2|a-b$$

$$\Rightarrow 4|(a+b)(a-b) \Rightarrow 4|a^2 - b^2 \Rightarrow a^2 \equiv b^2$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۵۰

کافی است از روز دوشنبه $23 + 26$ روز به سمت جلو حرکت کنیم.

$$26 + 23 \equiv 3$$

پس باید ۳ روز مفید از دوشنبه جلو برویم که به پنجشنبه می‌رسیم.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۵۱

صفر فقط عدد صفر را عاد می‌کند پس باید $n^3 - 8n^2 + 15n = 0$ در نتیجه:

$$n(n^2 - 8n + 15) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 0 \\ n = 3 \\ n = 5 \end{cases}$$

$(n-3)(n-5)$

از طرفی:

$$9^n | 3^7 \Rightarrow 3^{2n} | 3^7 \Rightarrow 2n \leq 7$$

پس فقط به ازای عدد طبیعی $n = 3$ ، هر دو رابطه برقرار است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۵۲

$$n = 7 \Rightarrow 3^7 - 1 = 2186 \neq 4k$$

$$n = 3 \Rightarrow 3^3 - 1 = 26 \neq 4k$$

$$n = 6 \Rightarrow 3^6 - 1 = 728 = 4 \times 182$$

$$n = 5 \Rightarrow 3^5 - 1 = 242 \neq 4k$$

۱۵۳

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

طبق مثال کتاب درسی، عدد $1 + 2^n$ به ازای $n = 1, 2, 3, 4$ (پس اعداد $1 + 2^1, 1 + 2^2, 1 + 2^3, 1 + 2^4$ و $1 + 2^4$ اول هستند)، اما به ازای $n = 5$ اول نیست یعنی عدد $1 + 2^{22}$ اول نیست.

۱۵۴

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

تعداد کیسه‌های ۲۰ و ۵۰ کیلویی را به ترتیب برابر x و y می‌گیریم پس کافی است تعداد جواب‌های نامنفی معادله $20x + 50y = 2430$ را به دست آوریم:

$$2x + 5y = 243 \xrightarrow{\text{پیمانه ۵}} 2y \equiv 243 \Rightarrow 5b \equiv 1 \equiv 5 \Rightarrow y \equiv 1 \Rightarrow y = 2k + 1$$

$$\Rightarrow 2x + 5(2k + 1) = 243 \Rightarrow x = -5k + 119$$

$$\begin{cases} x = -5k + 119 \geq 0 \\ y = 2k + 1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow k = 0, 1, 2, \dots, 23$$

پس به ۲۴ روش ممکن است ۲۴۳۰ کیلو در کیسه‌های ۲۰ و ۵۰ کیلویی توزیع شده باشند.

۱۵۵

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$x^2 + 5y^2 + 4z^2 \geq 2xy + 2xz - 2yz \Leftrightarrow x^2 + 5y^2 + 4z^2 - 2xy - 2xz + 2yz \geq 0$$

$$\xrightarrow{\times 2} 2x^2 + 10y^2 + 8z^2 - 4xy - 4xz + 4yz \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 4xy + 4y^2) + (x^2 - 4xz + 4z^2) + (y^2 + 4yz + 4z^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2y)^2 + (x - 2z)^2 + (y + 2z)^2 \geq 0$$

بنابراین $n = 3$ و $m = -2$ در نتیجه $3m + 2n = 0$ است.

۱۵۶

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مجموعه‌ی A ، $n + 1$ عضو دارد. پس تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی آن برابر است با:

$$\binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)n}{2}$$

$$\frac{(n+1)n}{2} = 4k \Rightarrow (n+1)n = 8k$$

طبق فرض سؤال می‌دانیم:

دو عدد n و $n + 1$ متوالی هستند و هر دو نمی‌توانند زوج باشند، پس یکی از آن‌ها مضرب ۸ است.

$$\begin{cases} n = 8q \Rightarrow n + 1 = 8q + 1 \\ n + 1 = 8q \end{cases}$$

پس تعداد اعضای مجموعه‌ی A به صورت $8q$ یا $8q + 1$ است که در میان گزینه‌ها تنها عدد ۶۵ به صورت $8 \times 8 + 1$ قابل نوشتن است.

۱۵۷

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. درستی گزاره الف را با روش مستقیم اثبات کرد و نادرستی گزاره‌های ب و پ را می‌توان با

مثال نقض نشان داد.

الف) $4m \mid 4n \Leftrightarrow 3n = 2mq \Leftrightarrow 21n = 14mq \Leftrightarrow 14m \mid 21n$

ب) $m^2 \mid n^2 \Rightarrow m^2 \mid n^2 \Rightarrow$ مثال نقض: $m = 8, n = 4$

پ) $m! \mid n! \Rightarrow m! \mid n \Rightarrow$ مثال نقض: $m = 2, n = 3$

بررسی گزینه‌ها:

۱) $2 \mid 3+5 \Rightarrow 2 \nmid 3, 2 \nmid 5$ نادرست

۲) $6 \mid 3 \times 4 \Rightarrow 6 \nmid 3, 6 \nmid 4$ نادرست

۳) $8 \mid 2^4 \Rightarrow 8 \nmid 2$ نادرست

۴) $ab \mid d \Rightarrow d = (ab)q \Rightarrow \begin{cases} d = a(bq) \Rightarrow a \mid d \\ d = b(aq) \Rightarrow b \mid d \end{cases}$ درست

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بررسی گزینه‌ها: ۱۵۹

۱) درست است. زیرا: $\begin{cases} a-b \mid a & \xrightarrow{\text{تفاضل}} a-b \mid b \Rightarrow a-b \mid b^2 \\ a-b \mid a-b & \text{را می‌شمارد} \end{cases}$

۲) درست است. زیرا: $\begin{cases} a-b \mid a & \xrightarrow{\text{جمع}} a-b \mid a+b \\ a-b \mid b & \text{را می‌شمارد} \end{cases}$

۴) درست است. زیرا: $\begin{cases} a-b \mid a & \xrightarrow{\text{ترکیب خطی}} a-b \mid 2a+3b \\ a-b \mid b & \text{را می‌شمارد} \end{cases}$

بنابراین گزینه‌ی (۳) نادرست است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در اثبات $p \Rightarrow q$ به روش برهان خلف، خلاف حکم $(\sim q)$ را در نظر گرفته و به خلاف فرض $(\sim p)$ می‌رسیم، یعنی $\sim p \Rightarrow \sim q$. ۱۶۰

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۶۱

$$\left. \begin{array}{l} 5 \mid 3n+1 \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} 25 \mid 9n^2+6n+1 \\ 5 \mid 3n+1 \xrightarrow{\times 5} 25 \mid 15n+5 \end{array} \right\} \Rightarrow 25 \mid 9n^2+6n+1+(15n+5) \\ \Rightarrow 25 \mid 9n^2+21n+6$$

بنابراین باقی‌مانده‌ی این تقسیم برابر صفر است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. می‌دانیم که: ۱۶۲

$$(a, b) = d \Rightarrow \begin{cases} d \mid a \\ d \mid b \end{cases}$$

فرض می‌کنیم $d = (2a-5, a^2-6a+3) = d$ آن‌گاه داریم:

$$d \mid 2a-5 \Rightarrow d \mid a(2a-5) \Rightarrow d \mid 2a^2-5a$$

$$d \mid a^2-6a+3 \Rightarrow d \mid 2(a^2-6a+3) \Rightarrow d \mid 2a^2-12a+6$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل را می‌شمارد } d} d \mid 7a-6$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d \mid 7a-6 \Rightarrow d \mid 2(7a-6) \\ d \mid 2a-5 \Rightarrow d \mid 7(2a-5) \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل را می‌شمارد}} d \mid 23$$

$$\Rightarrow d = 1 \text{ یا } d = 23 \xrightarrow{d \neq 1} d = 23$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۶۳

$$\begin{cases} 77 \equiv 5 \\ 61 \equiv 1 \end{cases} \Rightarrow 5x \equiv 1 \pmod{25} \xrightarrow[\substack{\div 5 \\ (5, 25)=1}]{\div 5} x \equiv 5 \pmod{25} \Rightarrow x = 25k + 5$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. تعداد کیسه‌های ۲ کیلویی را x و تعداد کیسه‌های ۵ کیلویی را y در نظر می‌گیریم:

$$2x + 5y = 51$$

$$5y = 51 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow y = 2K + 1$$

$$2x + 5(2K + 1) = 51 \Rightarrow x = 23 - 5K$$

بسته‌بندی موردنظر به ۵ روش امکان‌پذیر است.

$$\left. \begin{matrix} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 23 - 5K \geq 0 \Rightarrow K \leq \frac{23}{5} \\ 2K + 1 \geq 0 \Rightarrow K \geq -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow 0 \leq K \leq 4$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۶۵

$$N = 3^{185} + a \equiv 0 \Rightarrow \begin{cases} N \equiv 0 \rightarrow 3^{185} + a \equiv 0 : a \equiv 0 \\ N \equiv 0 \rightarrow 3^{185} + a \equiv 0 : a \equiv -1 \equiv 1 \end{cases}$$

از بین گزینه‌ها $a = 15$ درست است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۶۶

$$(a^2 + a + 3, a - 1) = d \Rightarrow \begin{cases} d | a - 1 \xrightarrow{\times a} d | a^2 - a \\ d | a^2 + a + 3 \rightarrow d | a^2 + a + 3 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} d | 2a + 3$$

$$\begin{cases} d | 2a + 3 \\ d | 2a - 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} d | 5 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } d = 5$$

چون در صورت مسئله ذکر شده است که دو عدد نسبت به هم اول‌اند، پس $d \neq 5$ ، یعنی $a - 1 \not\equiv 0 \pmod{5}$ ، در نتیجه داریم:

$$a - 1 \not\equiv 5k \Rightarrow a \not\equiv 5k + 1 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۶۷

$$a^2 | b^2 \Rightarrow a \times a^2 | b^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b | b^2 \\ a^2 | b^2 \Rightarrow a | b \Rightarrow a^2 | b^2 \Rightarrow a^2 | b^2 \times b \Rightarrow a^2 | b^3 \end{cases}$$

پس رابطه‌های گزینه‌های «۱» و «۳» و «۴» همواره درست هستند ولی رابطه گزینه «۲» در حالت کلی صحیح نیست.

(مثال نقض $a = 4$ و $b = 8$)

$$(5n+7, 4n+3) = d \Rightarrow \begin{cases} d|5n+7 \\ d|4n+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d|20n+28 \\ d|20n+15 \end{cases} \Rightarrow d|20n+28 - (20n+15) \\ \Rightarrow d|13 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } d = 13$$

می‌خواهیم این دو عدد نسبت به هم اول نباشند پس $d \neq 1$ و در نتیجه $d = 13$ است:

$$13|4n+3 \Rightarrow 4n+3 \equiv 0 \Rightarrow 4n \equiv -3 \equiv -16 \Rightarrow n \equiv -4 \equiv 9 \\ \Rightarrow n = 13k + 9k = 6 \Rightarrow N = 87$$

حالا باید همه گزینه‌ها را بررسی کنیم. شرط وجود جواب معادله سیاله $ax + by = c$ آن است که $(a, b) | c$ بنابراین:

$$\begin{aligned} \text{گزینه ۱: } 51x + 87y = 712 & \quad (51, 87) = 3 \nmid 712 \\ \text{گزینه ۲: } 58x + 87y = 319 & \quad (58, 87) = 29 \mid 319 \quad 319 = 29 \times 11 \\ \text{گزینه ۳: } 39x + 87y = 455 & \quad (39, 87) = 3 \nmid 455 \\ \text{گزینه ۴: } 29x + 87y = 264 & \quad (29, 87) = 29 \nmid 264 \end{aligned}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر به توان یک عدد، مضربی از ۴ اضافه یا کم شود رقم یکان تغییر نمی‌کند. به عبارت

$$\text{دیگر:} \quad a^n \equiv a^{n+4k} \Rightarrow a^{n+4k} - a^n \equiv 0$$

بنابراین اگر رقم یکان $a^m - a^n$ برابر با صفر باشد آن‌گاه $m - n$ مضربی از ۴ است.

حالا همه گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \text{گزینه ۲: } 37 - 23 &= 14 \neq 4k \\ \text{گزینه ۳: } 59 - 35 &= 24 = 4k \\ \text{گزینه ۴: } 57 - 47 &= 10 \neq 4k \end{aligned}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۷۰

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \quad \text{گزاره ی همیشه درست.}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۷۱

$$ab = cd \Rightarrow ab \mid cd, a \mid cd, b \mid cd, c \mid ab, d \mid ab$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۷۲

$$\left. \begin{aligned} a \mid 7m+6 &\Rightarrow a \mid 42m+36 \\ a \mid 6m+5 &\Rightarrow a \mid 42m+35 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a \mid (42m+36) - (42m+35) \Rightarrow a \mid 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

طبق فرض مسئله $a = 1$ قابل قبول است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۷۳

$$a = 37q + r, r = q^2 - 2$$

$$0 \leq r \leq 36 \Rightarrow 0 \leq q^2 - 2 \leq 36 \Rightarrow 2 \leq q^2 \leq 38$$

$$r = 36 - 2 = 34$$

بیشترین q^2 می‌تواند ۳۶ باشد پس داریم:

$$\begin{cases} q = 6 \\ r = 34 \end{cases} \Rightarrow a \text{ بزرگ‌ترین} = 37 \times 6 + 34 = 256, 16 \mid 256$$

نکته: اگر $n \in \mathbb{N}$ و $a, b \in \mathbb{Z}$ در این صورت داریم:

$$(a+b)^n \stackrel{ab}{=} a^n + b^n$$

$$n = 51, b = 12, a = 11$$

حال قرار می‌دهیم:

$$\Rightarrow (11+12)^{51} \stackrel{11 \times 12}{=} 11^{51} + 12^{51} \Rightarrow 23^{51} - 11^{51} - 12^{51} \stackrel{12}{=} 0.$$

و این به آن معناست که عدد A بر 132 بخش‌پذیر است. پس باقی‌مانده برابر صفر است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر $S = \{1, 2, 3, \dots, 400\}$ فضای نمونه و A و B زیرمجموعه‌هایی از این فضای نمونه باشند که اعضای آن‌ها به ترتیب بر ۲ و ۵ بخش‌پذیر هستند، آن‌گاه داریم:

$$|A| = \left\lfloor \frac{400}{2} \right\rfloor = 200$$

$$|B| = \left\lfloor \frac{400}{5} \right\rfloor = 80$$

$$|A \cap B| = \left\lfloor \frac{400}{10} \right\rfloor = 40$$

پیشامد بخش‌پذیر بودن عدد انتخابی بر یک عدد از بین اعداد ۲ و ۵، معادل مجموعه‌ی $(A - B) \cup (B - A)$ است. با توجه به ناسازگار بودن پیشامدهای $(A - B)$ و $(B - A)$ داریم:

$$\begin{aligned} P[(A - B) \cup (B - A)] &= P(A - B) + P(B - A) \\ &= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) \\ &= \frac{200}{400} + \frac{80}{400} - 2 \times \frac{40}{400} = \frac{200}{400} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$8x + 3y = 99 \Rightarrow 8x \equiv 99 \Rightarrow 2x \equiv \cdot \xrightarrow[\substack{\div 2 \\ (2,2)=1}}{x \equiv \cdot} \Rightarrow x = 2k \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$8(2k) + 3y = 99 \Rightarrow 3y = -24k + 99 \xrightarrow{\div 3} y = -8k + 33$$

$$\left. \begin{aligned} x > 0 &\Rightarrow 2k > 0 \Rightarrow k > 0 \\ y > 0 &\Rightarrow -8k + 33 > 0 \Rightarrow k < \frac{33}{8} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} 1 \leq k \leq 4$$

با توجه به روابط به دست آمده y همواره عددی فرد است ولی x تنها در صورتی فرد است که k عددی فرد باشد، بنابراین به ازای دو مقدار $k = 1$ و $k = 3$ ، معادله دارای جواب طبیعی و فرد است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{aligned} m &= 7q + 5 \\ m &= 8q' + 7 \end{aligned} \right\} \xrightarrow[\substack{\times 8 \\ \times 7}]{\substack{\text{تفریق دو رابطه} \\ \rightarrow}} \left. \begin{aligned} 8m &= 56q + 40 \\ 7m &= 56q' + 49 \end{aligned} \right\} \rightarrow m = 56(q - q') - 9 \\ \Rightarrow m = 56q'' - 9 \Rightarrow m = 56q'' - 56 + 47 \Rightarrow m = 56(q'' - 1) + 47 \\ \Rightarrow m = 56K + 47 \Rightarrow \text{باقی‌مانده } m \text{ در تقسیم } 56 \text{ برابر } 47 \text{ است.}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۷۸

$$\left. \begin{array}{l} x = 2K + 1 \\ y|x + 2 \Rightarrow x + 2 = yq \end{array} \right\} \Rightarrow 2K + 1 + 2 = yq \Rightarrow 2(K + 1) + 1 = yq$$

y صحیح و فرد است. $2K' + 1 = yq \Rightarrow y = 2K'' + 1$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 2 &= (2K + 1)^2 + (2K' + 1)^2 + 2 = 4K^2 + 4K + 1 + 4K'^2 + 4K' + 1 + 2 \\ &= \underbrace{4K(K + 1)}_{2q} + \underbrace{4K'(K' + 1)}_{2q'} + 5 = 4(2q) + 4(2q') + 5 \end{aligned}$$

در تقسیم بر ۸، باقی مانده برابر ۵ است. $\Rightarrow 8(q + q') + 5 = 8q'' + 5$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۷۹

اگر عدد مورد نظر x باشد، باید $3x - 13$ یا $3x \equiv 13 \pmod{v}$

$$\begin{aligned} &\downarrow \\ 3x &\equiv 13 - v \Rightarrow 3x \equiv 6 \xrightarrow{(3, v) = 1} x \equiv 2 \Rightarrow \boxed{x = vK + 2, K \in \mathbb{Z}} \end{aligned}$$

x باید چهار رقمی باشد $1000 \leq vK + 2 \leq 9999$

$$998 \leq vK \leq 9997$$

$$143 \leq K \leq 1428$$

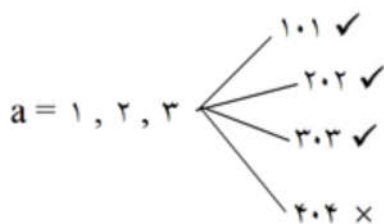
$$K = 1428 - 143 + 1 = 1286$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۸۰ $27 \equiv 1 \pmod{12} \Rightarrow 27^{1401} \equiv 1 \pmod{12}$ (۱)

$$2022 \equiv 6 \pmod{12}$$

باقی مانده ۸ $\Rightarrow 27^{1401} + 2022 \equiv 1 + 6 \equiv 7 \pmod{12}$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۸۱ $\overline{a \cdot a}$ باید سه رقمی باشد، پس:



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۸۲

$$vx - 3y = 11 \Rightarrow vx \equiv 11 \pmod{v} \Rightarrow x \equiv 2 \pmod{v} \Rightarrow x = 2 + vk$$

حال x را معادله قرار می دهیم و y را محاسبه می کنیم.

$$v(2 + vk) + 3y = 11 \Rightarrow y = 1 + vk \Rightarrow x + y = 3 + 10k$$

برای این که $x + y$ دورقمی باشد باید $1 \leq k \leq 9$ قرار گیرد، پس ۹ جواب دارد.

۱۸۳

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

در روش برهان خلف فرض می‌کنیم که حکم نادرست است و سپس با استفاده از قوانین منطق گزاره‌ها و دنباله‌ای از استدلال‌های درست و مبتنی بر فرض، به یک نتیجه غیرممکن یا نتیجه متضاد با فرض می‌رسیم و از آن‌جا (با توجه به منطقی بودن همه مراحل) معلوم می‌شود که فرض نادرست بودن حکم باطل است و درستی حکم ثابت می‌شود.

۱۸۴

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$97 \equiv_m 43 \Rightarrow 54 \equiv_m 0 \Rightarrow m | 54$$

$$\xrightarrow{m > 1} m \in \{2, 3, 6, 9, 18, 27, 54\}$$

مقادیر غیراول m عبارتند از: $\{6, 9, 18, 27, 54\}$

۱۸۵

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$a = 27q + r$$

$$0 \leq r < 27$$

$$a + 125 = 27(7) + 23 \Rightarrow a = 87$$

$$\Rightarrow 87 = 27 \times 3 + 6 \Rightarrow \begin{cases} q = 3 \Rightarrow 87 - 3 = 84 \\ r = 6 \end{cases}$$

۱۸۶

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

در ماه‌های ۳۰ روزه فقط در صورتی که روز اول یا دوم ماه یکشنبه باشد، آن ماه دارای ۵ تا یکشنبه می‌شود (در غیر این صورت ۴ تا یکشنبه دارد)، روز اول هر ماه را به دست می‌آوریم:

$$\underbrace{(31 - 3)}_{\text{تا انتهای اردیبهشت}} + \underbrace{4 \times 31}_{\text{تا انتهای تابستان}} + 1 \overset{\substack{\text{اول مهرماه} \\ \uparrow 7}}{=} 0 + 5 + 1 = 6$$

روز اول مهر، شنبه و روز دوم مهر، یکشنبه است، پس همین گزینه درست است.

اگر ۳۰ روز جلو برویم به اول آبان می‌رسیم یعنی:

$$30 + 6 \overset{7}{\equiv} 1 \rightarrow \text{اول آبان دوشنبه}$$

$$30 + 1 \overset{7}{\equiv} 3 \rightarrow \text{اول آذر چهارشنبه}$$

$$30 + 3 \overset{7}{\equiv} 5 \rightarrow \text{اول دی جمعه}$$

۱۸۷

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

(۱) در کتاب درسی درستی این قضیه اثبات شده است.

(۲) اگر $x = 1 - \sqrt{3}$ و $y = 1 + \sqrt{3}$ ، آنگاه x و y گنگ و $x + y = 2$ گویا می‌باشد.(۳) اگر $x = \sqrt{3}$ و $y = \text{Log } 2$ ، آنگاه $x^y = 2$ است که x و y گنگ اما $x^y = 2$ عدد طبیعی می‌باشد.

(۴) در کتاب درسی اثبات شده است.

۱۸۸

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

مثال نقض مناسب، عدد اول مانند p است که $2^p - 1$ اول نباشد. اگر $p = 11$ باشد، داریم:

$$2^{11} - 1 = 2047 = 23 \times 89$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۸۹

$$76x + 124y = 364 \xrightarrow{\div 4} 19x + 31y = 91 \Rightarrow 19x \equiv 91 \Rightarrow -12x \equiv 60$$

$$\Rightarrow x \equiv -5 \Rightarrow x = 31k - 5 \xrightarrow{k=4} x = 119 \Rightarrow \text{مجموع ارقام} = 11$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۹۰

$$2^n - 1 \equiv 0 \rightarrow 2^n \equiv 1$$

می‌دانیم $2^{17} = 7 \times 31$ بنابراین:

$$\begin{array}{ccc} 2^3 \equiv 1 & \text{و} & 2^5 \equiv 1 \\ \downarrow \text{دو طرف} & & \downarrow \text{دو طرف} \\ 2^{15} \equiv 1 & \text{و} & 2^{15} \equiv 1 \Rightarrow 2^{17} \equiv 1 \end{array}$$

دو طرف به توان k $\rightarrow 2^{15k} \equiv 1$

پس n باید به صورت $15k$ باشد. مقادیر ۴ رقمی n عبارتند از:

$$1000 \leq n \leq 9999 \rightarrow 1000 \leq 15k \leq 9999 \rightarrow 67 \leq k \leq 666$$

تعداد k برابر است با: $(666 - 67) + 1 = 600$

بنابراین ۶۰۰ عدد چهاررقمی با شرایط سؤال وجود دارد.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۹۱

$$\begin{cases} 5|2a + 3b + k \xrightarrow{\times 2} 5|4a + 6b + 2k \\ 5|3a + 2b + 1 \xrightarrow{\times 2} 5|6a + 4b + 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} 5|5b + 2k - 2$$

اما $5|5b$ بنابراین: $5|2k - 2$ و در بین گزینه‌ها کوچک‌ترین مقدار طبیعی k برابر با ۴ است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۹۲

$$\begin{cases} a \equiv^m b \\ a \equiv^n b \end{cases} \Rightarrow a \equiv^{[m,n]} b$$

نکته:

$$\begin{cases} A \equiv^{15} 11 \Rightarrow A \equiv -4 \\ A \equiv^{18} 14 \Rightarrow A \equiv -4 \Rightarrow A \equiv^{[20,18,15]} -4 \Rightarrow A \equiv^{180} -4 \Rightarrow A = 180k - 4 \\ A \equiv^{20} 16 \Rightarrow A \equiv -4 \end{cases}$$

$$k = 1 \Rightarrow A = 180 - 4 = 176$$

$$A \text{ مجموع ارقام} = 1 + 7 + 6 = 14$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۹۳

$$20 \equiv 6(31) + 20 \equiv 6(3) - 1 \equiv 17 \equiv 3$$

$$29 \equiv 365 \equiv 1 \text{ اسفند}$$

بنابراین ۲۹ اسفند ۲ روز عقب‌تر و شنبه است، پس سال جدید از یکشنبه آغاز می‌شود. $1 \equiv$ فروردین

$$17 \equiv 2(31) + 17 \equiv 2(3) + 3 \equiv 9 \equiv 2 \text{ خرداد}$$

پس ۱۷ خرداد یک روز جلوتر از یکشنبه است بنابراین دوشنبه می‌شود.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. طبق قضیه تقسیم داریم: ۱۹۴

$$2a + 1 = 23q + r \xrightarrow{r=q+5} 2a + 1 = 23q + q + 5 \Rightarrow 2a = 24q + 4$$

$$\div 2 \Rightarrow a = 12q + 2$$

هر عدد در تقسیم بر ۳، به یکی از سه صورت $3k$ ، $3k + 1$ و $3k + 2$ نوشته می‌شود.

$$q = 3k \Rightarrow a = 12(3k) + 2 = 36k + 2 \Rightarrow r_1 = 2$$

$$q = 3k + 1 \Rightarrow a = 12(3k + 1) + 2 = 36k + 14 \Rightarrow r_2 = 14$$

$$q = 3k + 2 \Rightarrow a = 12(3k + 2) + 2 = 36k + 26 \Rightarrow r_3 = 26$$

بنابراین حداکثر مقدار باقی‌مانده تقسیم a بر ۳۶، برابر ۲۶ است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانیم ایام هفته هر هفت روز تکرار می‌شود. کافی است ۳۰۰ را به ۷ تقسیم کنیم و به تعداد باقیمانده جلو برویم. ۱۹۵

$$300 \equiv 6$$

از جمعه ۶ روز جلو برویم به پنج‌شنبه می‌رسیم.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. فرض کنید $A = 7^{100} + 3^{100}$ باشد، یک بار باقیمانده‌ی A را بر ۷ و یک بار بر ۳ محاسبه می‌کنیم. ۱۹۶

$$A \equiv 7^{100} + 3^{100} \equiv 3^{100} \pmod{7} \quad (3^6 \equiv (-1)^3 \pmod{7}) \quad \times 3^3 \equiv -3 \pmod{7} \quad \times 3^3 \equiv -3 \pmod{7}$$

$$A \equiv 7^{100} + 3^{100} \equiv 7^{100} \pmod{3} \quad (7^2 \equiv 1 \pmod{3}) \quad \times 7^2 \equiv 1 \pmod{3} \quad \times 7^2 \equiv 1 \pmod{3}$$

پس باقیمانده‌ی A بر ۲۱، ۴ می‌باشد.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۹۷

$$n \equiv 7 \pmod{m} \Rightarrow \begin{cases} n^2 \equiv 49 \pmod{m} \\ 3n \equiv 21 \pmod{m} \end{cases} \Rightarrow n^2 + 3n \equiv 70 \pmod{m} \Rightarrow 70 \equiv -1 \pmod{m} \Rightarrow m \mid 71 \Rightarrow m = 1, 71$$

بزرگ‌ترین مقدار $m = 71$ است که مجموع ارقام آن برابر ۸ است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$ ، پس کافی است باقیمانده $(3^{41} - 1)^2$ را بر ۲۵ پیدا کنیم: ۱۹۸

$$3^2 \equiv 9 \pmod{25} \xrightarrow{\text{توان ۱۳}} 3^{26} \equiv 2^{13} = (2^6) \times (2^7)$$

از طرفی $14 \equiv 2^6 \pmod{25}$ و $3 \equiv 2^7 \pmod{25}$ پس:

$$3^{26} \equiv 3 \times 14 \pmod{25} \xrightarrow{\times 3^2} 3^{41} \equiv 9 \times 3 \times 14 \equiv 2 \times 14 \equiv 3 \pmod{25}$$

پس:

$$(3^{41} - 1)^2 \equiv (3 - 1)^2 \equiv 4 \pmod{25}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۹۹

$$3^2 \equiv 9 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^4 \equiv 81 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^6 \equiv 729 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^8 \equiv 6561 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{10} \equiv 59049 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{12} \equiv 531441 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{14} \equiv 4782969 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{16} \equiv 43046721 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{18} \equiv 387420583 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{20} \equiv 3486834267 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{22} \equiv 31381508401 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{24} \equiv 282429535617 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{26} \equiv 2541865820553 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{28} \equiv 22876792384977 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{30} \equiv 206891131464789 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{32} \equiv 1892019183183117 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{34} \equiv 17026172648648053 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{36} \equiv 150535553837832477 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{38} \equiv 1309819979040492297 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{40} \equiv 11266379811364430673 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{42} \equiv 95395378301720876053 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{44} \equiv 800871736665271684461 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{46} \equiv 6647304661645384999927 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{48} \equiv 55199089513906271999989 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{50} \equiv 451192440867113306399917 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{52} \equiv 3609579927156907452799517 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{54} \equiv 28076639417255260622397273 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{56} \equiv 21661311533804208507917789 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{58} \equiv 167290042770433668063343117 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{60} \equiv 1229670321153448144485532927 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{62} \equiv 9022527408150761073641492727 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{64} \equiv 67669955561150728552311191417 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{66} \equiv 507524666708655428192333930727 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{68} \equiv 380643500036484081948750397553 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{70} \equiv 2854826250273630614615627987167 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{72} \equiv 21411196877092824604519609853207 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{74} \equiv 16058398158369618053394727360527 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{76} \equiv 120437986186717336400461495683967 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{78} \equiv 90328489640042956800346121762971 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{80} \equiv 67746367230032227680259591318273 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{82} \equiv 50809775422524171760194693488697 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{84} \equiv 38107331566893334272146519606517 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{86} \equiv 28575503675270506604509964704981 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{88} \equiv 21431627756453385043382479523733 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{90} \equiv 16073720817340013532536859642859 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{92} \equiv 12055290612956010104002644782153 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{94} \equiv 9041467959227207678001983585719 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{96} \equiv 6781090979420485818401491688335 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{98} \equiv 5085818134565364363801118766055 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{100} \equiv 3814363600824027272800839074433 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{102} \equiv 2859772700618021014400629255729 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{104} \equiv 2144829025463015810300471481837 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{106} \equiv 1608621769097212107820353081381 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{108} \equiv 1206466326822929685855264811037 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{110} \equiv 9048497451161918243814486082621 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{112} \equiv 6786373088373493792810764561993 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{114} \equiv 5089779317279630154408077421597 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{116} \equiv 3819113988019782215806058966157 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{118} \equiv 28598807910148977618445443246741 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{120} \equiv 21459605977118781263534132434089 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{122} \equiv 16091704488338572896150698726093 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{124} \equiv 12073053367053515317115518109117 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{126} \equiv 9053660025280268990586637281371 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{128} \equiv 6790244019460203192440001110921 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{130} \equiv 5091333014595243879330001333377 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{132} \equiv 3820999510846877519547001666053 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{134} \equiv 2862499263234291279660250000061 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{136} \equiv 2147998997427233019795375000037 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{138} \equiv 1611998748060779543796531250021 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{140} \equiv 1211998161045583657897393750017 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{142} \equiv 9079976207841867034230453125013 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{144} \equiv 6799977155871450225772839375009 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{146} \equiv 5099977669403580179329629687505 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{148} \equiv 3829977801552710139547235843761 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{150} \equiv 2869977953329062171810782052501 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{152} \equiv 2149978119983594607213172500001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{154} \equiv 1619978299980318885659405000001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{156} \equiv 1219978399979239103084100000001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{158} \equiv 907997919997727328526125000001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{160} \equiv 679997959997392657194562500001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{162} \equiv 509997999996918183031843750001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{164} \equiv 382998039996392966173806250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{166} \equiv 286998079995718383460312500001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{168} \equiv 214998119994993996720481250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{170} \equiv 1619981599941359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{172} \equiv 1219981999931359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{174} \equiv 907982399921359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{176} \equiv 679982799910359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{178} \equiv 509983199899359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{180} \equiv 382983599888359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{182} \equiv 286983999877359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{184} \equiv 214984399866359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{186} \equiv 161984799855359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{188} \equiv 121985199844359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{190} \equiv 90785599833359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{192} \equiv 67985999822359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{194} \equiv 50986399811359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{196} \equiv 38286799800359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{198} \equiv 28687199789359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{200} \equiv 21487599778359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{202} \equiv 16187999767359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{204} \equiv 12188399756359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{206} \equiv 90784399742359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{208} \equiv 67984799731359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{210} \equiv 50985199720359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{212} \equiv 38285599709359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{214} \equiv 28685999698359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{216} \equiv 21486399687359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{218} \equiv 16186799676359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{220} \equiv 12187199665359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{222} \equiv 90773199642359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{224} \equiv 67973599631359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{226} \equiv 50973999620359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{228} \equiv 38274799609359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{230} \equiv 28675199598359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{232} \equiv 21475599587359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{234} \equiv 16175999576359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{236} \equiv 12176399565359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{238} \equiv 90757199542359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{240} \equiv 67957599531359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{242} \equiv 50957999520359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{244} \equiv 38258799509359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{246} \equiv 28659199498359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{248} \equiv 21459599487359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{250} \equiv 16159999476359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{252} \equiv 12160399465359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{254} \equiv 90743199442359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{256} \equiv 67943599431359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{258} \equiv 50943999420359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{260} \equiv 38244799409359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{262} \equiv 28645199398359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{264} \equiv 21445599387359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{266} \equiv 16145999376359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{268} \equiv 12146399365359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{270} \equiv 90737199342359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{272} \equiv 67937599331359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{274} \equiv 50937999320359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{276} \equiv 38238799309359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{278} \equiv 28639199298359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{280} \equiv 21439599287359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{282} \equiv 16139999276359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{284} \equiv 12140399265359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{286} \equiv 90723199242359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{288} \equiv 67923599231359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{290} \equiv 50923999220359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{292} \equiv 38224799209359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{294} \equiv 28625199198359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{296} \equiv 21425599187359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{298} \equiv 16125999176359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{300} \equiv 12126399165359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{302} \equiv 90717199142359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{304} \equiv 67917599131359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{306} \equiv 50917999120359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{308} \equiv 38218799109359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{310} \equiv 28619199098359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{312} \equiv 21419599087359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{314} \equiv 16119999076359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{316} \equiv 12120399065359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{318} \equiv 90703199042359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{320} \equiv 67903599031359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{322} \equiv 50903999020359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{324} \equiv 38204799009359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{326} \equiv 28605198998359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{328} \equiv 21405598987359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{330} \equiv 16105998976359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{332} \equiv 12106398965359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{334} \equiv 90693198942359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{336} \equiv 67893598931359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{338} \equiv 50893998920359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{340} \equiv 38194798909359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{342} \equiv 28595198898359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{344} \equiv 21395598887359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{346} \equiv 16095998876359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{348} \equiv 12096398865359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{350} \equiv 90687198842359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{352} \equiv 67887598831359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{354} \equiv 50887998820359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{356} \equiv 38188798809359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{358} \equiv 28589198798359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{360} \equiv 21389598787359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{362} \equiv 16089998776359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{364} \equiv 12090398765359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{366} \equiv 90680398742359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{368} \equiv 67880798731359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{370} \equiv 50881198720359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{372} \equiv 38181398709359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{374} \equiv 28581798698359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{376} \equiv 21382198687359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{378} \equiv 16082598676359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{380} \equiv 12083398665359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{382} \equiv 90673198642359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{384} \equiv 67873598631359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{386} \equiv 50873998620359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{388} \equiv 38174798609359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{390} \equiv 28574198598359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{392} \equiv 21374598587359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{394} \equiv 16074998576359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2} 3^{396} \equiv 12075398565359960806016250001 \pmod{56} \xrightarrow{\times 2}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مطابق فرض، عدد $۳^n + ۷۲$ مضرب ۷۳ است، پس:

$$۳^n + ۷۲ \equiv ۰ \Rightarrow ۳^n \equiv -۷۲ \equiv ۱$$

بیایید کوچک‌ترین توان عدد ۳ را پیدا کنیم که در تقسیم بر ۷۳ باقی‌مانده ۱ می‌دهد. از $۳^۶$ شروع می‌کنیم.

$$۳^۶ = ۸۱ \equiv ۸ \xrightarrow{\times ۳^۲} ۳^۸ \equiv ۷۲ \equiv -۱ \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۳^{۱۲} \equiv ۱$$

چون $۳^{۱۲} \equiv ۱$ ، پس $۳^{۱۲} \equiv ۱$ و در نتیجه n باید مضربی از ۱۲ باشد.

تعداد اعداد طبیعی $n = ۱۲k$ که دو رقمی‌اند برابر هستند با:

$$۱۰ \leq ۱۲k < ۱۰۰ \Rightarrow ۱ \leq k \leq ۸$$

هشت مقدار: