

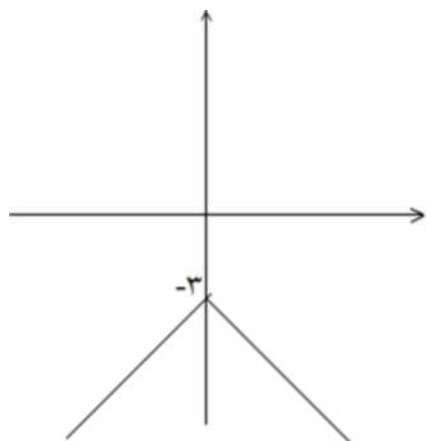
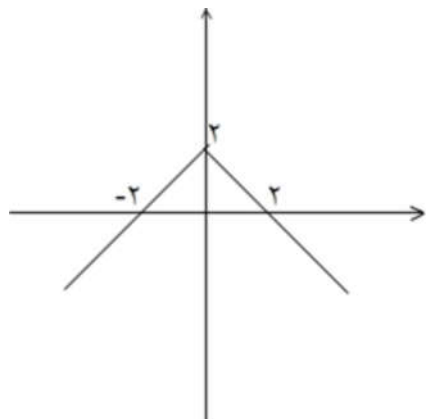
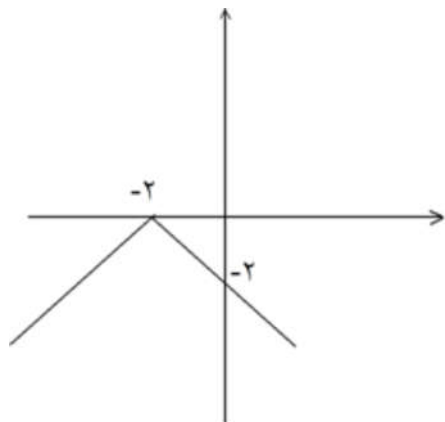
$$y = x^2 + 2x \Rightarrow y = (x + 1)^2 - 1 \Rightarrow x_1 = -1, y_1 = -1$$

$\Rightarrow$ محور تقارن $S(-1, -1), x = -1$ رأس

$$f(-x) = (-x)^2 + (-x) + 1 = x^2 - x + 1$$

$$f(2x) = (2x)^2 + 2x + 1 = 4x^2 + 2x + 1$$

$$f(x - 1) = (x - 1)^2 + (x - 1) + 1 = x^2 - x$$



۶

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 3) = x^2 - 3 + 2 = x^2 - 1$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 2) = (x + 2)^2 - 3 = x^2 + 4x + 1$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$D_g = \mathbb{R}$$

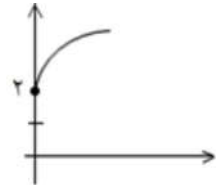
$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x + 2 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x \Rightarrow f(f(3)) = f\left(\frac{1}{3}\right) = 3$$

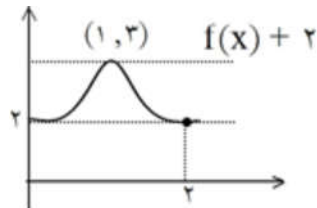
۷

۸ کافی است نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را در دو واحد به بالا، در راستای محور y ها منتقل کنیم.

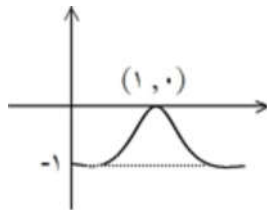


۹

باید نمودار f دو واحد به بالا برده شود.



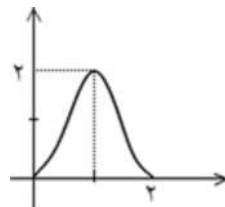
$$D_f = [0, 2] \quad R_f = [2, 3]$$



۱۰

باید نمودار f یک واحد به پایین آورده شود.

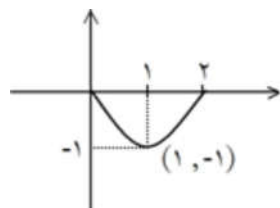
$$D_f = [0, 2] \quad R_f = [-1, 0]$$



۱۱

دامنه تغییر نمی‌کند ولی عرض نقاط ۲ برابر می‌شود.

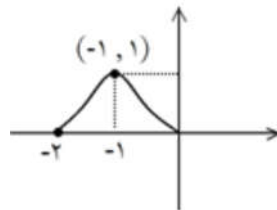
$$D_f = [0, 2] \quad R_f = [0, 2]$$



۱۲

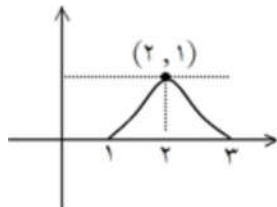
نمودار f باید نسبت به محور x ها قرینه شود.

$$D_f = [0, 2] \quad R_f = [-1, 0]$$



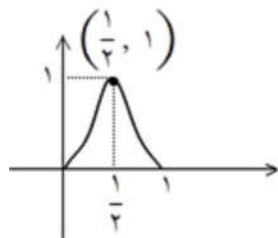
۱۳ نمودار f را، ۲ واحد به سمت چپ می‌بریم.

$$D_f = [-2, 0] \quad R_f = [0, 1]$$



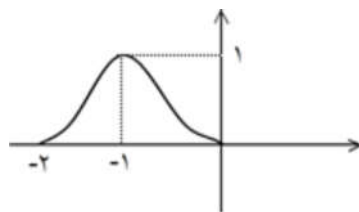
۱۴ نمودار f ، یک واحد به سمت راست برده می‌شود.

$$D_f = [1, 3] \quad R_f = [0, 1]$$



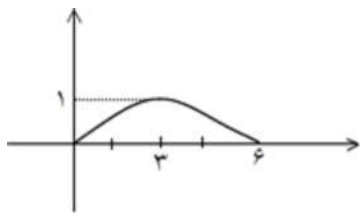
۱۵ برد تابع تغییر نمی‌کند ولی: $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 2x \leq 2$

$$D_f = [0, 1], R_f = [0, 1]$$



۱۶ نمودار f ، نسبت به محور y ها قرینه می‌شود.

$$D_f = [-2, 0], R_f = [0, 1]$$



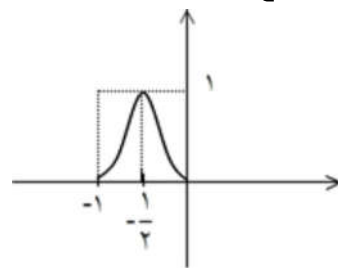
$$0 \leq \frac{x}{3} \leq 2 \Rightarrow 0 \leq x \leq 6$$

۱۷ برد تابع تغییر نمی‌کند ولی:

$$D_f = [0, 6], R_f = [0, 1]$$

$$0 \leq -2x \leq 2 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

۱۸ برد تابع تغییر نمی‌کند ولی:



$$D_f = [-1, 1], R_f = [0, 1]$$

$$D_f = R, D_g = R - \{0\}$$

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = R - \{0\}, (f+g)(x) = x - 1 + \frac{1}{x} = \frac{x^2 - x + 1}{x}$$

$$D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g = R - \{0\}, (f \cdot g)(x) = (x - 1) \left(\frac{1}{x} \right) = 1 - \frac{1}{x}$$

$$D_{\frac{g}{f}} = D_f \cap D_g - \{x \mid f(x) = 0\} = R - \{0, 1\}, \left(\frac{g}{f} \right)(x) = \frac{\frac{1}{x}}{x - 1} = \frac{1}{x^2 - x}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\} = R - \{0\}, \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{x - 1}{\frac{1}{x}} = x^2 - x, x \neq 0$$

$$D_{f \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_f\} = R, f(f(x)) = (x - 1) - 1 = x - 2$$

$$D_{g \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_g\} = \left\{ x \in R - \{0\} \mid \frac{1}{x} \in R - \{0\} \right\} = R - \{0\}, (g \circ g)(x) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x, x \neq 0$$

$$D_{f \circ g} = \left\{ x \in R - \{0\} \mid \frac{1}{x} \in R \right\} = R - \{0\}, f(g(x)) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1 - x}{x}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in R \mid x - 1 \in R - \{0\}\} = \{x \in R \mid x - 1 \neq 0\} = R - \{1\}, (g \circ f)(x) = \frac{1}{x - 1}$$

الف) $3(x^2 + 1) + 2 = 80 \Rightarrow 3x^2 + 5 = 80 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 5$

ب) $(3x + 2)^2 + 1 = 50 \Rightarrow (3x + 2)^2 = 49 \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2 = 7 \Rightarrow x = \frac{5}{3} \\ 3x + 2 = -7 \Rightarrow x = -3 \end{cases}$

ج) $f(g(x)) = g(f(x)) \Rightarrow 3x^2 + 5 = (3x + 2)^2 + 1 \Rightarrow 3x^2 + 5 = 9x^2 + 12x + 5$

$\Rightarrow 6x^2 + 12x = 0 \Rightarrow 6x(x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$

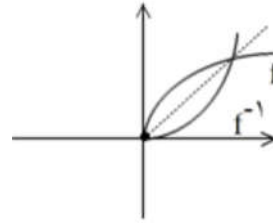
$f(g(x)) = (3x^2 - x + 1) + 3 = 3x^2 - x + 4, g(f(x)) = 3(x + 2)^2 - (x + 2) + 1$

$= 3x^2 + 11x + 11$

$(f \circ g)(a) = (g \circ f)(a) \Rightarrow 3a^2 - a + 4 = 3a^2 + 11a + 11 \Rightarrow 12a = -7 \Rightarrow a = -\frac{7}{12}$

f اکیداً صعودی است $\Rightarrow \sqrt{x_2} > \sqrt{x_1} \Rightarrow x_2 > x_1 \geq 0 \rightarrow \sqrt{x_2} > \sqrt{x_1}$

$y = \sqrt{x}, y \geq 0 \rightarrow x = y^2, y \geq 0 \rightarrow f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{2}}, x \geq 0$



$$f(x) = 2x - 4 \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+4}{2}, g(x) = 4x + 5 \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{x-5}{4}$$

$$\left. \begin{aligned} f(g(x)) &= 2(4x+5) - 4 \Rightarrow f \circ g(x) = 8x + 6 \Rightarrow (f \circ g)^{-1}(x) = \frac{x-6}{8} \\ g^{-1}(f^{-1}(x)) &= \frac{\frac{x+4}{2} - 5}{4} = \frac{x+4-10}{8} = \frac{x-6}{8} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow (1 - 2x_1)^2 = (1 - 2x_2)^2 \Rightarrow 1 - 2x_1 = 1 - 2x_2 \Rightarrow -2x_1 = -2x_2$$

$\Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f$ یک به یک است

$$y = (1 - 2x)^2 \Rightarrow 1 - 2x = \sqrt{y} \Rightarrow x = \frac{1 - \sqrt{y}}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1 - \sqrt{x}}{2}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{1\} \quad D_g = [-2, +\infty)$$

$$D_{\text{gof}} = \{x \mid x \in D_f, f(x) \in D_g\}$$

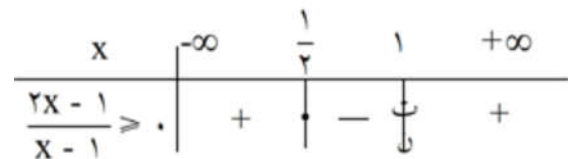
$$= \left\{ x \mid x \in \mathbb{R} - \{1\}, \frac{1}{x-1} \in [-2, +\infty) \right\} = \left\{ x \mid x \neq 1, \frac{1}{x-1} \geq -2 \right\}$$

$$\frac{1}{x-1} \geq -2 \Rightarrow \frac{1}{x-1} + 2 \geq 0 \Rightarrow \frac{1+2x-2}{x-1} \geq 0 \Rightarrow \frac{2x-1}{x-1} \geq 0$$

$$x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup (1, +\infty)$$

$$\Rightarrow D_{\text{gof}} = \left\{ x \neq 1, x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup (1, +\infty) \right\} = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup (1, +\infty)$$

$$\text{gof}(x) = g\left(\frac{1}{x-1}\right) = \sqrt{\frac{1}{x-1} + 2} = \sqrt{\frac{2x-1}{x-1}}$$



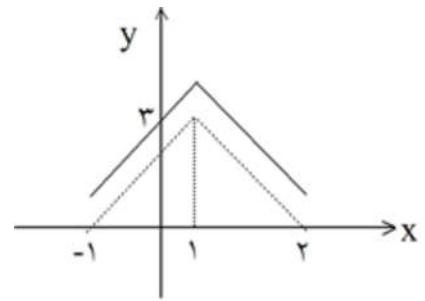
خیر زیرا: ۲۶

$$f^{-1} \text{ of } : D_f \rightarrow D_f$$

$$\text{fof}^{-1} : R_f \rightarrow R_f$$

$$\text{fof}^{-1} \neq f^{-1} \text{ of پس } D_f \neq R_f = D_{f^{-1}}$$

چون:



۲۷

۲۸

۲۹

۳۰

۳۱

۳۲

$$D = [-1, 2]$$

$$R = [1, 4]$$

$$\text{الف: } f(f(x)) = \frac{1}{2\left(\frac{1}{2x}\right)} = x \quad \text{ب: } f\left(\frac{1}{4}\right) = 2 \Rightarrow f\left(f\left(\frac{1}{4}\right)\right) = \frac{1}{4}$$

$$f(x-1) = x^2 \xrightarrow[x=t+1]{x-1=t} f(t) = (t+1)^2$$

$$\Rightarrow f(x) = (x+1)^2 \Rightarrow f(1) = 4$$

$$D_{\text{gof}} = \{x \in D_f | f(x) \in D_g\} = [-3, +\infty)$$

$$y = -x^2 + 4x - 3 = -[(x-2)^2 - 1]$$

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= -[(x_1-2)^2 - 1] \\ y_2 &= -[(x_2-2)^2 - 1] \\ y_1 &= y_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow \text{تابع یک به یک است پس معکوس پذیر است}$$

$$f(x) = (1-x)^2 \quad \text{۳۳}$$

$$\left. \begin{aligned} f(x_1) &= (1-x_1)^2 \\ f(x_2) &= (1-x_2)^2 \\ f(x_1) &= f(x_2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow (1-x_1)^2 = (1-x_2)^2 \quad (0/25) \Rightarrow \dots \Rightarrow x_1 = x_2 \quad (0/25)$$

پس f یک به یک است و بنابراین معکوس پذیر است. (0/25)

$$y = (1-x)^2 \Rightarrow \sqrt{y} = 1-x \Rightarrow x = 1-\sqrt{y} \Rightarrow f^{-1}(x) = 1-\sqrt{x} \text{ و } x \in R \quad (0/25)$$

صعودی اکید (0/25)

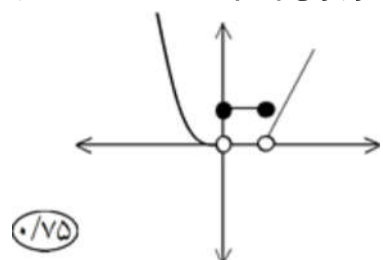
نزولی اکید (0/25)

ثابت (0/25)

در بازه $(1, +\infty)$ ۳۴

در بازه $(-\infty, 0)$

در بازه $[0, 1]$



۳۵

$$f(0) = 1, f(1) = 0 \Rightarrow \text{یک به یک نیست.} \quad (0/5)$$

$$\text{fog}(x) = \sqrt{1 + \sqrt{x-1}} = \sqrt{\sqrt{x}}$$

$$D_{\text{fog}} = \{x \mid x \in D_g, g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{x+1} \leq 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{x} \leq 0\} = [0, +\infty)$$

$$y_1 = y_2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{x_1+1}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x_2+1}} \Rightarrow \sqrt[3]{x_1+1} = \sqrt[3]{x_2+1}$$

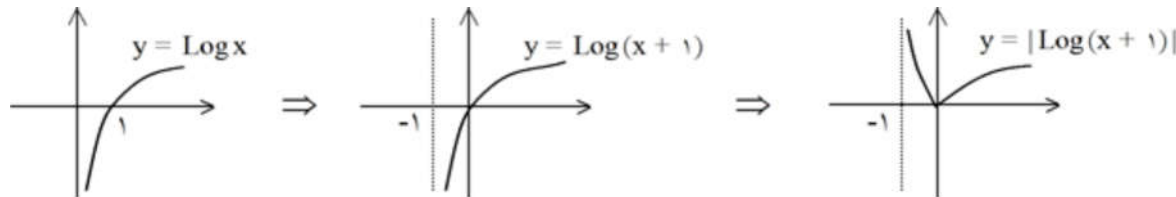
$$\Rightarrow x_1 + 1 = x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2$$

تابع یک‌به‌یک است پس وارون‌پذیر است.

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}} \Rightarrow \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{x+1} \Rightarrow \sqrt[3]{x+1} = \sqrt[3]{y+1}$$

$$\Rightarrow x+1 = \text{Log}_r(\sqrt[3]{y+1}) \Rightarrow x = -1 + \text{Log}_r(\sqrt[3]{y+1})$$

$$f^{-1}(x) = -1 + \text{Log}_r(\sqrt[3]{x+1})$$



$$f(g(x)) = \sqrt[3]{g(x)} - \sqrt[3]{\frac{0}{25}}$$

$$\sqrt[3]{g(x)} - \sqrt[3]{\frac{0}{25}} = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{\frac{0}{25}}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{g(x)} = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{\frac{0}{25}} \Rightarrow (g(x))^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{3}} + \sqrt[3]{\frac{0}{25}} = (x+1)^{\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow g(x) = |x+1| \sqrt[3]{\frac{0}{25}}$$

$$(\text{fog})(x) = f(g(x)) = \sqrt[3]{g(x)} - a \sqrt[3]{\frac{0}{25}}$$

$$= \sqrt[3]{ax + \sqrt[3]{b}} - a = \sqrt[3]{ax} + \sqrt[3]{b} - a \Rightarrow \sqrt[3]{ax} + (\sqrt[3]{b} - a) = \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{\frac{0}{25}} \Rightarrow \sqrt[3]{b} - a = -\sqrt[3]{\frac{0}{25}} \Rightarrow b = -1$$

$$(\text{fog})(x) = \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{\frac{0}{25}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{0}{25}} \sqrt[3]{\frac{0}{25}} \sqrt[3]{\frac{0}{25}}$$

$$D_f : [1, +\infty) \sqrt[3]{\frac{0}{25}}$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1 \Rightarrow \sqrt{x_1 - 1} < \sqrt{x_2 - 1} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

$$\sqrt[3]{\frac{0}{25}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{0}{25}}$$

تابع f اکیداً صعودی است پس یک‌به‌یک است. $\sqrt[3]{\frac{0}{25}}$

$$\sqrt[3]{\frac{0}{25}} [f(a), f(b)]$$

$$\text{الف) } D_f = \mathbb{R} - \{2\} \sqrt[3]{\frac{0}{25}}$$

$$D_g = \mathbb{R} \sqrt[3]{\frac{0}{25}}$$

$$D_{\text{fog}} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \sqrt[3]{\frac{0}{25}}$$

$$D_{\text{fog}} = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt[3]{x} - 1 \in \mathbb{R} - \{2\}\} = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$\text{ب) } (\text{fog})(x) = f(g(x)) = \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[3]{x} - 2} \sqrt[3]{\frac{0}{25}}$$

$$\text{ج) } (\sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{2})(2) = \sqrt[3]{1}(2) + \sqrt[3]{2}(2) = 18 + 16 = 34$$

$$\sqrt[3]{\frac{0}{25}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{0}{25}}$$

$$D_f = R - \{0\} \quad (0/25), D_g = [1, +\infty) \quad (0/25)$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_f \mid g(x) \in D_f\} \quad (0/25) \Rightarrow$$

$$D_{f \circ g} = \left\{x \in [1, +\infty) \mid \sqrt{x-1} \in R - \{0\}\right\} \quad (0/25) \Rightarrow D_{f \circ g} = (1, +\infty) \quad (0/25)$$

$$\text{ب) } (f \circ g)(x) = f(\sqrt{x-1}) = \frac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x-1}} \quad (0/5)$$

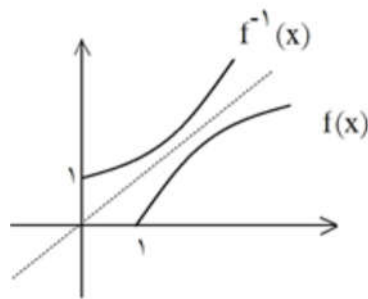
$$\text{ج) } \frac{f(g(5))}{g(5)} = \frac{f(2)}{2} = \frac{2 \times \frac{2}{5}}{2} = \frac{2}{5} \quad (0/25)$$

$$(1, a+2b), (1, 4) \in f \xrightarrow{f \text{ تابع است}} a+2b=4 \quad (1)$$

$$(-2, 3), (2a-b, 3) \in f \xrightarrow{f \text{ تابعی یک به یک است}} 2a-b=-2 \quad (2)$$

$$1, 2 \Rightarrow 2 \times \begin{cases} a+2b=4 \\ 2a-b=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+2b=4 \\ 4a-2b=-4 \end{cases} \Rightarrow 5a=0 \Rightarrow a=0$$

$$\stackrel{(1)}{\rightarrow} 0+2b=4 \Rightarrow b=2$$



$$D_f = [1, +\infty) \Rightarrow \begin{cases} D_{f^{-1}} = [0, +\infty) \\ R_{f^{-1}} = [1, +\infty) \end{cases}$$

$$x > 1 \Rightarrow y = 3x + \frac{3x-2}{x-1} \Rightarrow y = 3x + \frac{3(x-1)}{x-1} \Rightarrow y = 3x+3 \Rightarrow y-3 = 3x$$

$$\div 3 \Rightarrow \frac{y-3}{3} = x \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = \frac{x-3}{3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-3}{3}$$

$$A(3, 0) \Rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 0}{0 - 3} = \frac{0}{-3} = 0 \Rightarrow y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$\Rightarrow y - 0 = 0(x - 0) \Rightarrow y = 0 \Rightarrow f(x) = -x + 3$$

$$y = -x + 3 \Rightarrow x = -y + 3 \Rightarrow f^{-1}(x) = -x + 3$$

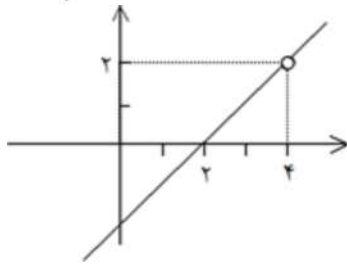
$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = -x + 3 + (-x + 3) = -2x + 6$$

$$f(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2 \quad (x \neq 2)$$

x	۰	۲
y	۲	۴

در تابع معکوس

x	۲	۴
y	۰	۲



$$\text{با توجه به نمودار} \begin{cases} D_{f^{-1}} = R - \{4\} \\ R_{f^{-1}} = R - \{2\} \end{cases}$$

۵۲ رأس سهمی همان نقطه‌ی مینیمم است.

$$x = \frac{-b}{2a} = -\frac{-2}{2 \times 1} = 1 \Rightarrow y = 1^2 - 2 \times 1 + 3 = 2$$

$$f = \{(-1, 2), (0, 3), (4, -1)\}$$

$$f^{-1} = \{(2, -1), (3, 0), (-1, 4)\}$$

$$D_{f^{-1}} = \{2, 3, -1\} = R_f$$

$$R_{f^{-1}} = \{-1, 0, 4\} = D_f$$

$$f = \{(m^2 + 2, 5), (n^2 + 1, 4)\} \Rightarrow f^{-1} = \{(5, m^2 + 2), (4, n^2 + 1)\}$$

$$\Rightarrow R_{f^{-1}} = \{m^2 + 2, n^2 + 1\}$$

$$\begin{cases} m^2 + 2 = 18 \Rightarrow m^2 = 16 \Rightarrow m = \pm 4 \\ n^2 + 1 = -7 \Rightarrow n^2 = -8 \Rightarrow n^2 = (-2)^2 \Rightarrow n = -2 \end{cases}$$

۵۵ اگر نمودار یک تابع درجه دوم، محور x ها را با طول‌های x_1 و x_2 قطع کند، می‌توانیم معادله‌ی آن را به صورت

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

در نظر بگیریم، بنابراین از آن‌جا که نمودار تابع درجه دوم f محور x ها را با طول‌های صفر و چهار

قطع کرده است، می‌توانیم معادله‌ی آن را به صورت $f(x) = ax(x - 4)$ در نظر بگیریم و از آن‌جا که نمودار تابع از نقطه‌ی $(2, 3)$ گذشته، مختصات آن در معادله‌ی تابع صدق می‌کند:

$$(2, 3) \in f \Rightarrow f(2) = 3 \Rightarrow a \times 2 \times (2 - 4) = 3 \Rightarrow a = \frac{-3}{4} \Rightarrow f(x) = -\frac{3}{4}x(x - 4)$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3x$$

$$\xrightarrow{x=1} f(1) + f(1) = 12 \Rightarrow 2f(1) = 12 \Rightarrow f(1) = 6 \Rightarrow f(x) + 6 = 5x + 7$$

$$\Rightarrow f(x) = 5x + 1$$

$$y = 5x + 1 \Rightarrow y - 1 = 5x \xrightarrow{\div 5} \frac{y-1}{5} = x \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = \frac{x-1}{5}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x-1}{5}$$

$$\begin{aligned}
 (v, f^{-1}(v)) \in f^{-1} &\Rightarrow (f^{-1}(v), v) \in f \Rightarrow \begin{cases} x = f^{-1}(v) \\ f(x) = v \end{cases} \Rightarrow v + f^{-1}(v) = v f^{-1}(v) + 1v \\
 \Rightarrow v f^{-1}(v) = -1v &\Rightarrow f^{-1}(v) = -v \xrightarrow{f^{-1}(v) = -v} f(x) - v = vx + 1v \Rightarrow f(x) = vx + 1v \\
 y = vx + 1v &\Rightarrow y - 1v = vx \Rightarrow \frac{y - 1v}{v} = x \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = \frac{x - 1v}{v} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x - 1v}{v}
 \end{aligned}$$

$$y = ax^v + bx + c \text{ معادله سهمی} \quad ۵۸$$

$$\begin{aligned}
 A(\cdot, 1) &\Rightarrow 1 = a(\cdot)^v + b(\cdot) + c \Rightarrow c = 1 \\
 B(-1, \cdot) &\Rightarrow \cdot = a(-1)^v + b(-1) + 1 \Rightarrow a - b = -1 \\
 C(v, \cdot) &\Rightarrow \cdot = a(v)^v + b(v) + 1 \Rightarrow 1va + vb = -1 \\
 v \times \begin{cases} a - b = -1 \\ 1va + vb = -1 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} va - vb = -v \\ 1va + vb = -1 \end{cases} \Rightarrow v \cdot a = -\Delta \Rightarrow a = -\frac{1}{v}, b = \frac{v}{v} \\
 y = -\frac{1}{v}x^v + \frac{v}{v}x + 1 &
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \log(x) &= vx^v - vx \Rightarrow (g(x))^v + vg(x) = vx^v - vx \\
 f(g(x)) &= (g(x))^v + vg(x) \\
 \xrightarrow{+1} (g(x))^v + vg(x) + 1 &= vx^v - vx + 1 \Rightarrow (g(x) + 1)^v = (vx - 1)^v \\
 \Rightarrow g(x) + 1 &= \pm(vx - 1) \Rightarrow \begin{cases} g(x) + 1 = vx - 1 \Rightarrow g(x) = vx - 2 \\ g(x) + 1 = -vx + 1 \Rightarrow g(x) = -vx \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y = vx - 1 &\Rightarrow y + 1 = vx \xrightarrow{\div v} \frac{y + 1}{v} = x \Rightarrow \frac{y}{v} + \frac{1}{v} = x \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = \frac{x}{v} + \frac{1}{v} \\
 \Rightarrow f^{-1}(x) &= \frac{x}{v} + \frac{1}{v}
 \end{aligned}$$

$$f^{-1}(vx) = \frac{vx}{v} + \frac{1}{v} = x + \frac{1}{v}$$

$$g(x) = \frac{f(x)}{f^{-1}(vx)} = \frac{vx - 1}{x + \frac{1}{v}} \Rightarrow D_g = R - \{-\frac{1}{v}\}$$

$$\begin{aligned}
 x = 1 &\Rightarrow g(1) = \cdot \Rightarrow A(1, \cdot) \Rightarrow m = \frac{y_1 - y_1}{x_1 - x_1} = \frac{v - \cdot}{v - 1} = v \\
 x = v &\Rightarrow g(v) = v \Rightarrow B(v, v) \\
 y - y_1 &= m(x - x_1) \Rightarrow y - \cdot = v(x - 1) \Rightarrow y = vx - v \\
 y + v &= vx \xrightarrow{\div v} \frac{y + v}{v} = x \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = \frac{x + v}{v} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x + v}{v}
 \end{aligned}$$

$$f(x) = vx + \Delta \Rightarrow y = vx + \Delta \Rightarrow y - \Delta = vx \Rightarrow x = \frac{y - \Delta}{v} \xrightarrow{x \leftrightarrow y} f^{-1}(x) = \frac{x - \Delta}{v}$$

$$g(x) = x - v \Rightarrow y = x - v \Rightarrow y + v = x \xrightarrow{x \leftrightarrow y} g^{-1}(x) = x + v$$

$$h(x) = \frac{x + 1}{\left(\frac{x - \Delta}{v}\right)(x + v)} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x - \Delta}{v} \neq \cdot \Rightarrow x \neq \Delta \\ x + v \neq \cdot \Rightarrow x \neq -v \end{cases} \Rightarrow D_h = R - \{\Delta, -v\}$$

۶۳ با تساوی قرار دادن دو تابع باید $\Delta < 0$ باشد.

$$\begin{aligned}
 (m - 1)x^v + v\sqrt{v}x - m &= \sqrt{v}x - vm \Rightarrow (m - 1)x^v + \sqrt{v}x + m = \cdot \\
 \Rightarrow \Delta < 0 &\Rightarrow (\sqrt{v})^v - vm(m - 1) < 0 \Rightarrow v - vm^v + vm < 0 \xrightarrow{\times (-1)} vm^v - vm - v > \cdot \\
 \Rightarrow m < -\frac{1}{v} &\text{ و } m > \frac{v}{v}
 \end{aligned}$$

$$(m-1)x^2 + 4x + 3m - 2 = -2x + m - 2 \Rightarrow (m-1)x^2 + 6x + 3m + 1 = 0$$

$$\xrightarrow{\Delta=0} 36 - 4(m-1)(3m+1) = 0 \Rightarrow 36 - 4(3m^2 - m - 1) = 0 \xrightarrow{\div 4} 9 - (3m^2 - m - 1) = 0$$

$$-3m^2 + m + 10 = 0 \xrightarrow{\times (-1)} 3m^2 - m - 10 = 0 \Rightarrow (3m-5)(m+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 5/3 \\ m = -2 \end{cases}$$

$$3kx^2 - 5x + k + 1 = x + 2k + 2 \Rightarrow 3kx^2 - 6x - k - 1 = 0 \xrightarrow{\Delta < 0} 36 + 12k^2 + 12k < 0$$

$$\xrightarrow{\div 12} \underbrace{k^2 + k + 3}_{\text{همواره مثبت}} < 0 \Rightarrow k \text{ هیچ مقدار}$$

$$\text{الف) } f(5) = 5^2 + 5(5) + 1 = 51$$

$$\text{ب) } f(t-1) = (t-1)^2 + 5(t-1) + 1 = t^2 - 2t + 1 + 5t - 5 + 1 = t^2 + 3t - 3$$

$$\text{پ) } f(4) = 16 + 20 + 1 = 37$$

$$\text{ت) } f(\sqrt{2}-1) = (\sqrt{2}-1)^2 + 5(\sqrt{2}-1) + 1 = 2 + 1 - 2\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 5 + 1 = 3\sqrt{2} - 1$$

$$\text{الف) } y = 1 - 4x \Rightarrow 4x = 1 - y \Rightarrow x = \frac{1-y}{4} \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = \frac{1-x}{4} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1-x}{4}$$

$$\text{ب) } y = \frac{2}{3}x - 3 \Rightarrow \frac{2}{3}x = y + 3 \xrightarrow{\times \frac{3}{2}} x = \frac{3}{2}y + \frac{9}{2} \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = \frac{3}{2}x + \frac{9}{2} \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{3}{2}x + \frac{9}{2}$$

$$R_f = [2, 8]$$

$$2 \leq 3x + 5 \leq 8 \xrightarrow{-5} -3 \leq 3x \leq 3 \xrightarrow{\div (3)} -1 \leq x \leq 1 \Rightarrow D_f = [-1, 1]$$

$$D_g = [-2, 5]$$

$$-2 \leq x \leq 5 \xrightarrow{\text{بسته شود می رسانیم}} 0 \leq x^2 \leq 25 \xrightarrow{-5} -5 \leq x^2 - 5 \leq 20 \Rightarrow R_g = [-5, 20]$$

تابع	$f(x) = 3x + 5$	$g(x) = x^2 - 5$
دامنه تابع	$[-1, 1]$	$[-2, 5]$
برد تابع	$[2, 8]$	$[-5, 20]$

$$f(x) = 35 - 4x \Rightarrow y = 35 - 4x \Rightarrow 4x = 35 - y \Rightarrow x = \frac{35-y}{4} \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = \frac{35-x}{4}$$

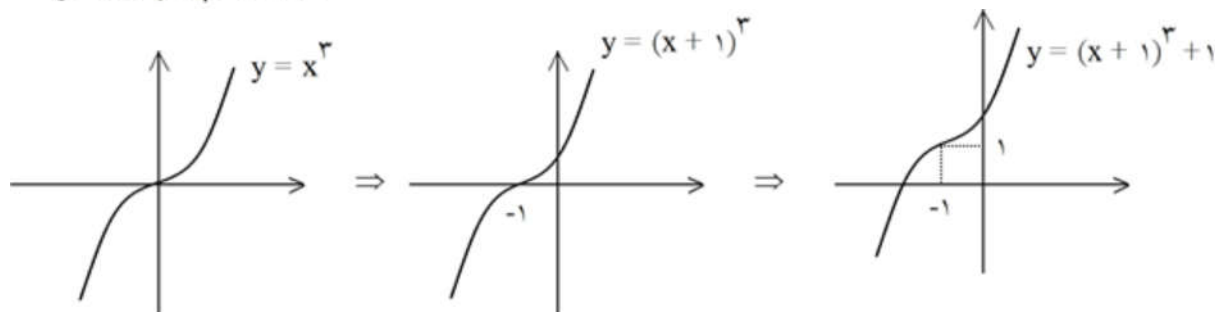
$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{35-x}{4}$$

$$h(x) = \frac{1}{f^{-1}(x)} = \frac{1}{\frac{35-x}{4}} \Rightarrow h(x) = \frac{4}{35-x} \Rightarrow 35-x \neq 0 \Rightarrow x \neq 35$$

$$D_h = R - \{35\}$$

$$y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 1 \Rightarrow y = (x + 1)^3 + 1$$

اتحاد مکعب دو جمله ای



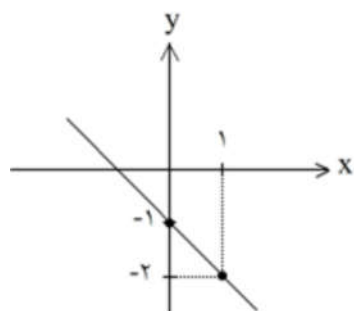
۷۰

۷۱ الف)

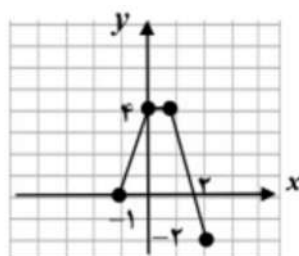
$$f(x) = 2x - 1 \Rightarrow -2 \leq x \leq 5 \xrightarrow{x \rightarrow 2x} -2 \leq 2x \leq 10 \xrightarrow{\div 2} -1 \leq x \leq 5/2$$

$$D_{f(2x)} = [-1, 5/2]$$

$$f\left(-\frac{x}{2}\right) = 2\left(-\frac{x}{2}\right) - 1 \Rightarrow f\left(-\frac{x}{2}\right) = -x - 1 \quad (\text{ب})$$



x	۰	۱
y	-۱	-۲



(۰/۵)

$$D_g = [-1; 2] \quad (۰/۲۵)$$

$$R_g = [-2; 4] \quad (۰/۲۵)$$

۷۲

$$f(f(x)) = 2(2x + k) + k = 4x + 3k$$

$$\text{fofof}(x) = f(f(f(x))) = 2(4x + 3k) + k = 8x + 7k$$

$$8x - 15 = 8x + 7k \Rightarrow 7k = -15 \Rightarrow k = -\frac{15}{7} \Rightarrow f(x) = 2x - \frac{15}{7} \Rightarrow 2x - \frac{15}{7} = -1$$

$$\Rightarrow x = \frac{4}{7} \Rightarrow f^{-1}(-1) = \frac{4}{7}$$

۷۳

اگر نمودار را ۲ واحد به سمت راست منتقل کنیم نمودار تابع $y = f(x)$ رسم می‌شود. بنابراین صفرهای تابع $y = f(x)$ نقاط $-۲, ۰, ۳, ۵$ هستند.

۷۴

از طرفی دامنه‌ی $g(x)$ برابر است با $R - \{f(x) = ۰\}$ پس: $D_g = R - \{-۲, ۰, ۳, ۵\}$

$$x + \delta = t \Rightarrow x = t - \delta \Rightarrow f(t) = (t - \delta)^5 - 3(t - \delta) \Rightarrow f(t) = t^5 - 5\delta t^4 + 6\delta^2 t^3 - 3\delta^4 + 3\delta$$

$$\Rightarrow f(t) = t^5 - 5\delta t^4 + 6\delta^2 t^3 \Rightarrow f(x) = x^5 - 5\delta x^4 + 6\delta^2 x^3$$

$$\text{الف) } f(x) = x^5 - \delta \quad g(x) = \sqrt{x + \delta}$$

$$D_f = \mathbb{R} \quad D_g = [-\delta, +\infty) \Rightarrow D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$= \{x \in [-\delta, +\infty) \mid \sqrt{x + \delta} \in \mathbb{R}\} = \sqrt{x + \delta} \in \mathbb{R} \Rightarrow D_{f \circ g} = [-\delta, +\infty) \cap \mathbb{R} = [-\delta, +\infty)$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (g(x))^5 - \delta = (\sqrt{x + \delta})^5 - \delta = x + 1$$

$$\text{ب) } f(x) = \sqrt{3 - 2x} \quad g(x) = \frac{\delta}{3x - \delta}$$

$$D_f = \left(-\infty, \frac{3}{2}\right] \quad D_g = \mathbb{R} - \left\{\frac{\delta}{3}\right\}$$

$$D_{f \circ g} = \left\{x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\delta}{3}\right\} \mid \frac{\delta}{3x - \delta} \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right]\right\} = \left(-\infty, \frac{\delta}{3}\right) \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{3 - 2g(x)} = \sqrt{3 - 2\left(\frac{\delta}{3x - \delta}\right)} = \sqrt{\frac{9x - 2\delta}{3x - \delta}}$$

$$\text{پ) } f(x) = \sqrt{x + 2} \quad g(x) = \sqrt{x^5 - 1\delta}$$

$$D_f = [-2, +\infty) \quad D_g = (-\infty, -\delta] \cup [\delta, +\infty)$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in [-2, +\infty) \mid \sqrt{x + 2} \in (-\infty, -\delta] \cup [\delta, +\infty)\} = [1\delta, +\infty)$$

$$\sqrt{x + 2} \leq -\delta \Rightarrow \sqrt{x + 2} \geq \delta \Rightarrow x + 2 \geq 1\delta \Rightarrow x \geq 1\delta \Rightarrow x \in [1\delta, +\infty)$$

همواره نادرست است.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{(f(x))^5 - 1\delta} = \sqrt{x - 1\delta}$$

$$\text{ت) } f(x) = \sin x \quad g(x) = \sqrt{x}$$

$$D_f = \mathbb{R} \quad D_g = [0, +\infty)$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} \mid \sin x \in [0, +\infty)\} = \mathbb{R} \cap [2k\pi, 2k\pi + \pi] \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$= [2k\pi, 2k\pi + \pi]_{k \in \mathbb{Z}}$$

$$\sin x \geq 0 \xrightarrow{\text{ناحیه اول و دوم}} x \in [2k\pi, 2k\pi + \pi] \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$(f \circ g)(x) = g(f(x)) = \sqrt{(f(x))} = \sqrt{\sin x}$$

$$f(g(x)) = 3x^5 - \delta x + 1\delta \quad f(x) = 3x - \delta$$

$$f(g(x)) = 3(g(x)) - \delta \Rightarrow 3x^5 - \delta x + 1\delta = 3(g(x)) - \delta \Rightarrow 3(g(x)) = 3x^5 - \delta x + 1\delta$$

$$\Rightarrow g(x) = x^5 - \delta x + \delta$$

$$(f \circ g)(\delta) = f(g(\delta)) = g(\delta)^5 - \delta = (\sqrt{x^5 - \delta})^5 - \delta = (\sqrt{\delta^5 - \delta})^5 - \delta$$

$$= 21 - \delta = 1\delta$$

$$\begin{cases} f(x) = 3x \\ g(x) = \delta x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f \circ g(x) = f(g(x)) = 3(\delta x) = \delta x \\ g \circ f(x) = g(f(x)) = \delta(3x) = \delta x \end{cases} \Rightarrow f \circ g(x) = g \circ f(x)$$

$$(f \circ g)(\delta) = f(g(\delta)) = f(\delta) = \delta$$

$$\begin{cases} (f \circ g)(\delta) = f(g(\delta)) = \sqrt{3 \times \delta - 1} = \sqrt{2} = \delta \\ g(\delta) = 3 \times \delta - 1 = 2 \end{cases}$$

الف) نادرست

ب) نادرست

پ) درست

ت) درست

الف) $\begin{cases} \text{fog}(x) = f(g(x)) = \sqrt[3]{3x^3 - 4x + 1} \times \\ \text{gof}(x) = g(f(x)) = 3\sqrt[3]{x^3 - 4\sqrt[3]{x} + 1} \times \end{cases}$

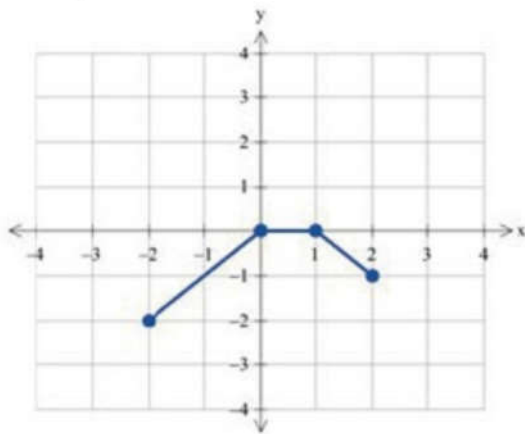
ب) $\begin{cases} \text{kol}(x) = k(l(x)) = (3x^3 - 4x + 1)^5 \checkmark \\ \text{lok}(x) = l(k(x)) = 3(x^5)^3 - 4x^5 + 1 = 3x^{15} - 4x^5 + 1 \times \end{cases}$

الف) $y = \frac{1}{3}f(3x) - 1$

$y = \frac{1}{3}f(3x) - 1 \quad 3x = t \Rightarrow t = \frac{1}{3}x$

x	$\frac{1}{3} \times (-2)$	$\frac{1}{3} \times (-1)$	$\frac{1}{3} \times (0)$	$\frac{1}{3} \times (1)$	$\frac{1}{3} \times (2)$
y	$\frac{1}{3}(-2) - 1$	$\frac{1}{3}(0) - 1$	$\frac{1}{3}(2) - 1$	$\frac{1}{3}(2) - 1$	$\frac{1}{3}(0) - 1$

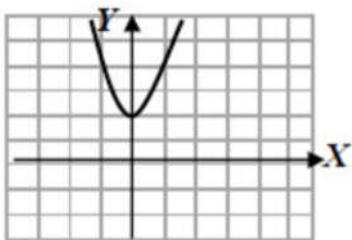
x	-2	-1	0	1	2
y	-2	-1	0	0	-1



$$y = \begin{cases} x & -2 \leq x \leq 0 \\ 0 & 0 \leq x \leq 1 \\ -x + 1 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$D = [-2, 2] \quad R = [-2, 0]$$

نادرست ۸۱



اکیدا نزولی $(-\infty, 0)$
اکیدا صعودی $(0, +\infty)$

۸۲

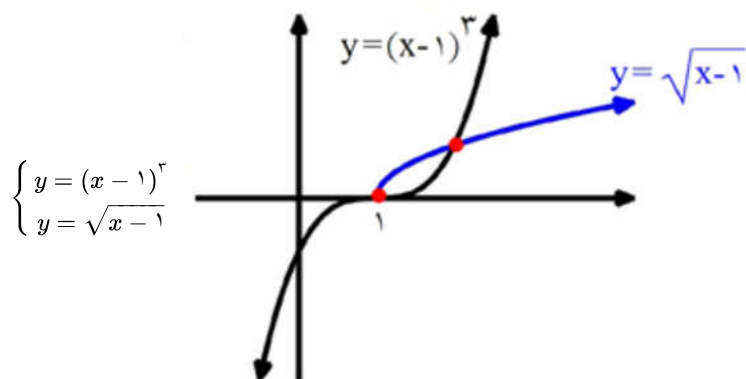
درست ۸۳

$f(x) \rightarrow |x|$
 $g(x) \rightarrow |x| + 1$
 $h(x) \rightarrow -|x - 1|$
 $k(x) \rightarrow -|x + 1|$

۸۴

$$x^3 - 3x^2 + 3x = \sqrt{x-1} + 1 \rightarrow \underbrace{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}_{\text{اتحاد مکعب دو جمله ای}} = \sqrt{x-1}$$

۸۵



معادله دارای دو جواب است.

$$-5 - \sqrt{3x+1} = y \Rightarrow 3x+1 = (y+5)^2 \Rightarrow x = \frac{(y+5)^2 - 1}{3} \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{(x+5)^2 - 1}{3}$$

$$D_{g^{-1}} = (-\infty, -5]$$

۸۶

$$(f \circ g)(4) = f(g(4)) = f(1) = -1$$

الف ۸۷

$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(7) = 5$$

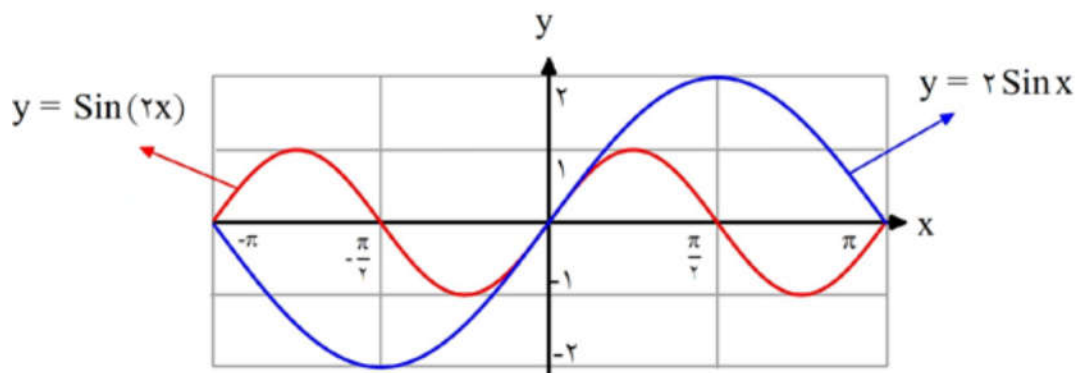
ب

$$(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(5) = 2$$

الف ۸۸

$$(g \circ f)(4) = g(f(4)) = g(11) = 2$$

ب



۸۹

$$(g^{-1} \circ f^{-1})(24) = g^{-1}(f^{-1}(24))$$

۹۰

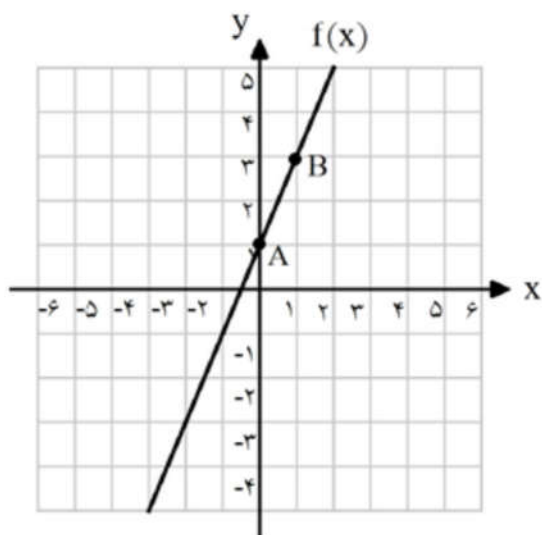
عدد ۲۴ برای تابع f خروجی تابع است.

$$f(x) = \frac{x}{5} - 1 = 24 \Rightarrow \frac{x}{5} = 25 \Rightarrow x = 125$$

عدد ۱۲۵ برای تابع g خروجی تابع است.

$$x^3 = 125 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow y^{-1}(125) = 5$$

با توجه به اینکه تابع از نقاط A و B می‌گذرد و f یک تابع خطی است، داریم:



$$f(x) = ax + b$$

$$A(0, 1) \Rightarrow a(0) + b = 1 \Rightarrow b = 1$$

$$B(1, 3) \Rightarrow a(1) + b = 3 \Rightarrow a + 1 = 3 \Rightarrow a = 2$$

$$f(x) = 2x + 1 \Rightarrow y = 2x + 1 \Rightarrow y - 1 = 2x \Rightarrow \frac{y - 1}{2} = x \Rightarrow y = \frac{x - 1}{2}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x - 1}{2}$$

الف) $a = 2$ و $b = 1$ ۹۲

ب) ۶

الف) $D_f = [-1, \infty)$, $D_g = \mathbb{R}$

$$D_{\text{gof}} = \left\{ x \geq -1 \mid \sqrt{x+1} \in \mathbb{R} \right\} = [-1, +\infty)$$

ب) $\text{fog}(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 2) = \sqrt{x^2 + 4}$

$$f(x) = (x - 2)^2 + 1$$

در بازه‌های $(-\infty, 2]$ یا $[2, \infty)$ یا هر زیرمجموعه این دو بازه تابع یک به یک است.

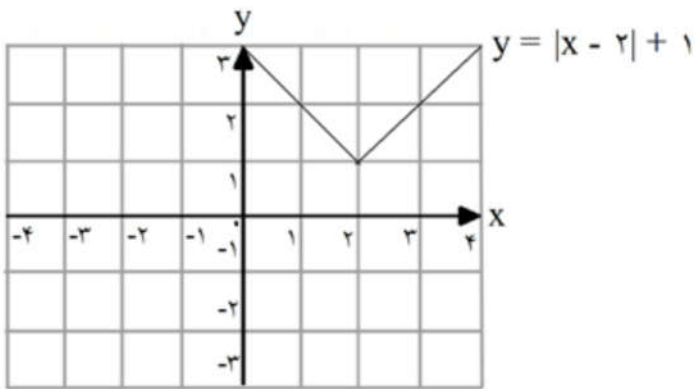
$$2x + 5 = 8 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow (1, 8) \in f \Rightarrow f^{-1}(8) = 1$$

درست ۹۵

$$f(x) = x$$

$$g(x) = -x + 2$$

$$D_{\text{gof}} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \geq -1 \mid 0 \leq x \leq 2\} = [-1, 2]$$



۹۸

۹۹ الف

$$D_f = \mathbb{R}$$

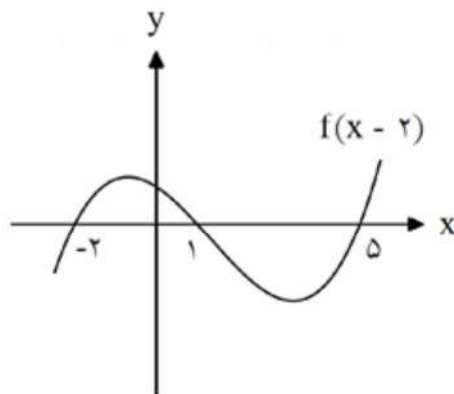
$$D_g : x - 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4 \Rightarrow D_{\text{gof}} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

$$\Rightarrow D_{\text{gof}} = \{x \in \mathbb{R} \mid 4x - 1 \geq 4\} \Rightarrow 4x \geq 5 \Rightarrow x \geq \frac{5}{4} \Rightarrow D_{\text{gof}} = [\frac{5}{4}, +\infty)$$

ب

$$\frac{(f \circ g)(\frac{1}{2})}{(g \circ f)(\frac{3}{4})} = \frac{f(g(\frac{1}{2}))}{g(f(\frac{3}{4}))} = \frac{f(\frac{1}{2})}{g(\frac{3}{4})} = \frac{3}{4}$$

۱۰۰ برای رسم تابع $f(x - 2)$ باید نمودار $f(x)$ را دو واحد به سمت راست منتقل کنیم.



x	$-\infty$	-4	-2	-1	1	3	5	$+\infty$
f(x)	-	•	+	+	•	-	•	+
f(x - 2)	-	-	•	+	+	•	-	•
f(x) × f(x - 2)	+	•	-	•	+	•	-	•

$$f(x) \times f(x - 2) \geq 0 \Rightarrow D_g = (-\infty, -4] \cup [-2, -1] \cup [1, 3] \cup [5, +\infty)$$

۱۰۱ برای آنکه تابع نمایی $y = a^x$ یک تابع اکیداً صعودی باشد، باید $a > 1$ باشد.

$$\forall m - 1 > 1 \Rightarrow \forall m > 2 \Rightarrow m > 1$$

$$f(x) = x^2 - 2x - 2 \xrightarrow{\text{واحد به سمت راست}} y = (x - 2)^2 - 2(x - 2) - 2$$

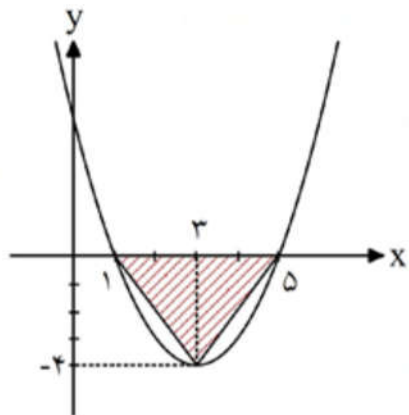
$$\xrightarrow{\text{یک واحد به طرف پایین}} y = (x - 2)^2 - 2(x - 2) - 2 - 1 = x^2 - 4x + 4 - 2x + 4 - 2 - 1 = x^2 - 6x + 5$$

$$\Rightarrow y = x^2 - 6x + 5$$

برای یافتن صفرهای تابع، ضابطه را برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 5 \end{cases}$$

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow y_0 = (3)^2 - 6(3) + 5 = 9 - 18 + 5 = -4$$



$$S = \frac{(5 - 1) + |-4|}{2} = \frac{4 \times 4}{2} = 8$$

۱۰۳ الف) نیمساز ربع اول و سوم یا $y = x$

ب) یک به یک

۱۰۴ نادرست

$$y = -x^2 - 2 \xrightarrow{x \geq 0} x = \sqrt{-y - 2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{-x - 2}$$

$$D_{f^{-1}} = (-\infty, -2]$$

۱۰۵

ب) انقباض افقی

۱۰۶ الف) انبساط عمودی

$$g(x) = (x - 1)^2 + 2, g(0) = g(2) = 3$$

۱۰۷ الف)

ب)

$$f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = (x - 1)^2 + 2$$

$$x - 1 = \pm \sqrt{y - 2} \xrightarrow{x \geq 1} f^{-1}(x) = \sqrt{x - 2} + 1$$

۱۰۸ نادرست.

$$\begin{aligned} \max &= |a| + c \Rightarrow \begin{cases} |a| + c = 12 \\ -|a| + c = 2 \end{cases} \Rightarrow 2c = 14 \Rightarrow c = 7 \\ \min &= -|a| + c \\ \xrightarrow{c=7} & |a| + 7 = 12 \Rightarrow |a| = 5 \end{aligned}$$

(ب)

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \xrightarrow{b=2} T = \frac{2\pi}{2}$$

۱۱۰ و یک به یک است. (توجه: اگر دانش‌آموز فقط وارون $g(x)$ را محاسبه کرده باشد نمره کامل داده شود.)

$$g(x) = |x - 1| + 2 \xrightarrow{x \geq 1} y = x - 1 + 2 \Rightarrow y = x + 1 \Rightarrow y - 1 = x \Rightarrow g^{-1}(x) = x - 1$$