

۱

۲

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

این ماتریس ۴ ستون دارد. - با تعویض سطرها و ستون‌ها با هم تعداد سطرهای جدید همان تعداد ستون‌های قبلی یعنی

۴ است.

۳

$$\begin{matrix} & A & B & C & D \\ A & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ B & \\ C & \\ D & \end{matrix}$$

۴

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}_{3 \times 1} \times [a \ b \ c]_{1 \times 3} = \begin{bmatrix} a^2 & ab & ac \\ ba & b^2 & bc \\ ca & cb & c^2 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

۵

$$[1 \ 2 \ 3 \ 4]_{1 \times 4} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}_{4 \times 1} = 1 \times (-1) + 2 \times 0 + 3 \times 2 + 4 \times 1 = -1 + 0 + 6 + 4 = 9$$

۶

$$[1 \ 2] \times \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [1 \times (-1) + 2 \times 0 \quad 1 \times 0 + 2 \times 1] = [-1 \quad 2]$$

۷

$$[0 \ 1] \times [0 \times -1 + 1 \times 0 \quad 0 \times 0 + 1 \times 1] = [0 \ 1]$$

۸

$$[0 \ 1] \times \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [0 \times (-1) + 1 \times 0 \quad 0 \times 0 + 1 \times 1] = [0 \ 1]$$

۹

چون $A \cdot A^{-1} = I$ و $A \cdot A^{-1} = -I$ پس $B = -A^{-1}$ حال کافی است A^{-1} را بیابیم.

۱۰

$$A^{-1} = \frac{1}{-4 - 2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = -\frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow B = -A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$MN = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$NM = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

پس $MN \neq NM$.

۱۱

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ax + by = -x \rightarrow a = -1 \text{ و } b = 0 \\ cx + dy = -y \rightarrow c = 0 \text{ و } d = -1 \end{cases} \rightarrow C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

۱۲

$$A^{-1} = \frac{1}{-1 - 1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow A(-A^{-1}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow X = -A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

۱۳) کافیت درایه‌های نظیر را با هم جمع کنیم.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 4 & 9 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 3 & 9 \\ 4 & 1 & 10 \\ 4 & 12 & 5 \end{bmatrix}$$

۱۴) ماتریس حاصل ضرب یک ماتریس 2×1 می‌باشد.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 29 \end{bmatrix}$$

۱۵) درایه‌های هر سطر و ستون نشان دهنده‌ی ارتباط بین دو واحد متفاوت می‌باشد. مثلاً درایه سطر دوم و ستون اول یعنی

$\frac{1}{3}$ با درایه‌ی سطر اول ستون سوم یعنی ۶ ارتباط بین واحد b, c را مشخص می‌کند. اگر این دو عدد را در هم ضرب کنیم، $\frac{1}{3} \times 6 = 2$ عدد a_{23} را به دست می‌آوریم. در ضمن برای محاسبه‌ی ماتریس A^T درایه‌های این ماتریس عبارتند از:

$$A = [a_{ij}]_{4 \times 4} \Rightarrow A^T = C = [c_{ij}]_{4 \times 4}$$

$$\forall ij : c_{ij} = \sum_{k=1}^4 a_{ik} a_{kj} = \sum_{k=1}^4 a_{ij} = 4a_{ij}$$

بنابراین درایه‌های ماتریس A^T مساوی ۴ برابر درایه‌های ماتریس A می‌باشد.

$$A^T = 4A = \begin{bmatrix} 4 & 12 & 24 & 36 \\ \frac{4}{3} & 4 & 8 & 32 \\ \frac{4}{6} & \frac{4}{3} & 4 & 16 \\ \frac{4}{24} & \frac{4}{8} & \frac{4}{4} & 4 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 5000 & 2000 & 1500 \\ 2000 & 2000 & 1000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22500 \\ 15000 \end{bmatrix} \text{ قیمت فروش در هر بازار}$$

$$AC = \begin{bmatrix} 5000 & 2000 & 1500 \\ 2000 & 2000 & 1000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/8 \\ 3/5 \\ 2/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19750 \\ 13100 \end{bmatrix} \text{ قیمت تمام شده در هر بازار}$$

$$AB - AC = \begin{bmatrix} 22500 \\ 15000 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 19750 \\ 13100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27500 \\ 19000 \end{bmatrix} \text{ سود در هر بازار}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = I$$

۱۷) ابتدا ماتریس A^T را به دست می‌آوریم.

$$A^{1^0} = (A^T)^{\Delta} = I^{\Delta} = I$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y & z \\ p & q & r \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{vmatrix} \begin{bmatrix} x & y & z \\ p & q & r \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ e & f & 0 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} x & y & z \\ p & q & r \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ = \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ e & f & 0 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} x & y & z \\ p & q & r \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \times 0 = 0$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} = 3A$$

$$A^{\Delta} = (A^T)^T \times A = (3A)^T \times A = 9A^T \times A = 9A^T \times A = 27A^T = 81A$$

$$= 81A = \begin{bmatrix} 81 & 81 & 81 \\ 81 & 81 & 81 \\ 81 & 81 & 81 \end{bmatrix}$$

ابتدا معادله داده شده را حل می‌کنیم.

۲۰

$$\begin{vmatrix} 1 & b & a+1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \xrightarrow[\text{سوم بسط می‌دهیم}]{\text{بازجایب سطر سوم}} (a+1)(-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 3(-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & b \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (a+1)(5) - 3(2+b) = 0 \Rightarrow 5a + 5 - 6 - 3b = 0 \Rightarrow 5a - 3b = 1$$

حال دترمینان خواسته شده را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{vmatrix} 1 & b & a \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{بسط می‌دهیم}]{\text{بازجایب سطر سوم}} (-1)(-1)^4 \begin{vmatrix} b & a \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 2(-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & a \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -1(3b - a) - 2(3 - 2a) = -3b + a - 6 + 4a = 5a - 3b - 6 \xrightarrow{5a-3b=1} = 1 - 6 = -5$$

$$A^T + AB = \begin{bmatrix} 5 & 9 & 9 \\ 8 & 13 & 15 \\ 11 & 11 & 20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 7 & 4 \\ 4 & 12 & 6 \\ 13 & 14 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 16 & 13 \\ 12 & 25 & 21 \\ 24 & 25 & 27 \end{bmatrix}$$

$$(AB)^t = B^t A^t = BA = AB$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} + I = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (A^{-1} + I)^{-1} = \frac{1}{-4} \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow (A^{-1} + I)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x - 4y = 13 \\ 2x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 13 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{11} & \frac{4}{11} \\ -\frac{2}{11} & \frac{3}{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{13}{11} + \frac{20}{11} = 3 \\ y = \frac{26}{11} + \frac{15}{11} = -1 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} m-3 & 3 \\ 4 & m+1 \end{vmatrix} \neq 0 \xrightarrow{(\cdot/25)} (m-3)(m+1) - 12 \neq 0 \xrightarrow{(\cdot/25)} m \neq 5, m \neq -2 \quad (0/25)$$

$$m \in \mathbb{R} - \{5, -2\} \quad (0/25)$$

ماتریس مربعی که تمام درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن صفر باشند و تمام درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابر باشند، ماتریس اسکالر است.

در دو ماتریس مساوی تمام درایه‌های نظیر برابرند. پس داریم:

$$A = B \Rightarrow \begin{cases} 6 = 6x + 3y \\ x - y = 4 \\ 7 = z + 2 \Rightarrow z = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x + 3y = 6 \\ x - y = 4 \end{cases} \Rightarrow x = 2, y = -2$$

$$\text{پس } 3x - y + z = 6 + 2 + 5 = 13$$

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}, B = [b_{ij}]_{m \times n} \Rightarrow A + B \Rightarrow [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n} \quad (\text{الف } 28)$$

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}, r \in \mathbb{R} \Rightarrow rA = [ra_{ij}]_{m \times n} \quad (2)$$

(ج) اگر $A + (-A) = O$ آن‌گاه $-A$ قرینه‌ی ماتریس A است.

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}, B = [b_{ij}]_{m \times n} \Rightarrow 2A + 3B = [2a_{ij} + 3b_{ij}]_{m \times n} \quad (د)$$

۲۹ بنابر تعریف درایه‌های ماتریس A داریم.

$$\begin{aligned} a_{11} &= 7, a_{12} = 1, a_{13} = 1, a_{14} = 1 \\ a_{21} &= 3, a_{22} = 7, a_{23} = 4, a_{24} = 4 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix} \\ a_{31} &= 4, a_{32} = 5, a_{33} = 7, a_{34} = 9 \end{aligned}$$

۳۰ ماتریس‌های $A = [2 \ -3 \ -1]_{1 \times 3}$ و $B = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ را در نظر می‌گیریم. داریم:

$$A \times B = [2 \ -3 \ -1] \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [(2)(-5) + (-3)(0) + (-1)(1)] = [-11] = -11$$

۳۱ الف) ماتریس AB از مرتبه‌ی $n \times m$ است.

ب) درایه‌های C_{ij} برابر سطر i ام ماتریس A ضرب در ستون j ام ماتریس B است.

ج) ماتریس همانی عضو خنثی ضرب ماتریس‌های مربعی است.

د) در حالت کلی ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ندارد.

هـ) $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$

۳۲ ابتدا درایه‌های ماتریس‌های A و B را به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} a_{11} &= 0, a_{12} = 1 \\ a_{21} &= 1, a_{22} = 3 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 2}, \quad b_{11} = 2, b_{12} = 1, b_{13} = 0 \\ a_{31} &= 2, a_{32} = 1 \quad b_{21} = 3, b_{22} = 5, b_{23} = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 11 & 16 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

بنابراین:

$$B \times A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 19 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

۳۳ در ماتریس قطری درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی صفر هستند.

$$A \times B = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+3a & -8+2a \\ b-3 & -2b-2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -8+2a=0 \Rightarrow a=4 \\ b-3=0 \Rightarrow b=3 \end{cases}$$

۳۴ ابتدا درایه‌های ماتریس‌های A و B را به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} a_{11} &= 0, a_{12} = 0, a_{13} = 0 \\ a_{21} &= 2, a_{22} = 2, a_{23} = 2 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 6 & 6 & 6 \end{bmatrix} \\ a_{31} &= 6, a_{32} = 6, a_{33} = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{11} &= 2, b_{12} = 4, b_{13} = 8 \\ b_{21} &= 1, b_{22} = 2, b_{23} = 5 \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\ b_{31} &= 0, b_{32} = 0, b_{33} = 2 \end{aligned}$$

$$C = 2A - B = 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 6 & 6 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -8 \\ 3 & 2 & -1 \\ 12 & 12 & 10 \end{bmatrix}$$

پس:

$$C^T = C \times C = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -8 \\ 3 & 2 & -1 \\ 12 & 12 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -4 & -8 \\ 3 & 2 & -1 \\ 12 & 12 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -104 & -96 & -60 \\ -12 & -20 & -36 \\ 132 & 96 & -8 \end{bmatrix}$$

بنابراین:

۳۵ ابتدا A^T و سپس A^T را به دست می‌آوریم.

$$A^T = A \times A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$B = A^T = A^T \times A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 11 \\ 5 & -9 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow b_{12} = 4, b_{21} = 5, b_{31} = 0$$

$$b_{12} + 2b_{21} - b_{31} = 4 + 10 - 0 = 14$$

پس داریم:

۳۶ ابتدا ماتریس A^T را به دست می‌آوریم.

$$A^T = A \times A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 9 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A^T + mA + nI_2 = \vec{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 9 & -2 \end{bmatrix} + m \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \vec{0}$$

پس داریم:

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1+2m+n & -3-m \\ 9+3m & -2+m+n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -3-m=0 \Rightarrow m=-3 \\ 1+2m+n=0 \Rightarrow n=5 \end{cases} \Rightarrow m+n=2$$

۳۷ ابتدا ماتریس A^T را به دست می‌آوریم:

$$A^T = A \times A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$A^{TT} = (A^T)^T = I^T = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$A^T = A \times A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

۳۸ ماتریس A^T را به دست می‌آوریم.

ماتریس A^T خصوصیت ویژه‌ای ندارد پس A^T را پیدا می‌کنیم.

$$A^T = A^T \times A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$A^{TT} = A^{TA} \times A^T = (A^T)^T \times A^T = I^T \times A^T = I \times A^T = A^T$$

پس:

۳۹ مسلماً ماتریس A از مرتبه‌ی 1×3 می‌باشد. فرض کنیم $A = [x \ y \ z]$ داریم.

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \times A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 2 & 1 & -1 \\ d & e & f \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} [x \ y \ z] = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 2 & 1 & -1 \\ d & e & f \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z \\ x & y & z \\ 3x & 3y & 3z \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & b & c \\ 2 & 1 & -1 \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x = a \\ 2z = f \\ 2z = c \\ x = 2 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ c = -2 \Rightarrow 2a - f + 2c = 12 + 3 - 4 = 9 \\ f = -2 \end{cases}$$

پس نتیجه می‌گیریم:

۴۰ توجه کنید ماتریس $(A - B)$ به صورت زیر قابل محاسبه است.

$$(A - B)^T = (A - B)(A - B) = A^T - AB - BA + B^T \quad (۱)$$

$$(A - B)^T = (A - B)(A - B) = \begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۲ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۲ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۶ & ۰ \\ ۰ & ۶ \end{bmatrix} = ۶I \quad (۲)$$

$$(۲), (۱) \Rightarrow A^T - AB - BA + B^T = ۶I \Rightarrow \begin{bmatrix} ۲ & ۸ \\ ۶ & ۱۸ \end{bmatrix} - (AB + BA) + \begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ -۴ & ۳ \end{bmatrix} = ۶I$$

$$\Rightarrow AB + BA = \begin{bmatrix} ۲ & ۸ \\ ۶ & ۱۸ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ -۴ & ۳ \end{bmatrix} - ۶ \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow AB + BA = \begin{bmatrix} -۱ & ۱۲ \\ ۰ & ۲۰ \end{bmatrix}$$

۴۱ دو ماتریس A و B وارون یکدیگرند هرگاه $AB = I$ و $BA = I$ باشد.

$$A \times B = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow A \text{ وارون } B \text{ است}$$

$$B \times A = \begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

۴۲ ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۳ & ۵ & ۷ \\ ۰ & -۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید حاصل دترمینان را برحسب ستون سوم باز می‌کنیم.

$$|A| = \begin{vmatrix} ۳ & ۵ & ۷ \\ ۰ & -۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{vmatrix} = (-۱)(-۱) \begin{vmatrix} ۳ & ۵ \\ ۰ & -۱ \end{vmatrix} = -۱(-۳) = ۳$$

$$A = \begin{bmatrix} ۵ & ۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{۱}{۱۰ - ۶} \begin{bmatrix} ۲ & -۲ \\ -۳ & ۵ \end{bmatrix} = \frac{۱}{۴} \begin{bmatrix} ۲ & -۲ \\ -۳ & ۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲} \\ -\frac{۳}{۴} & \frac{۵}{۴} \end{bmatrix} \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{۵}{۸} - \frac{۳}{۸} = \frac{۱}{۴}$$

$$A = \begin{bmatrix} ۵ & ۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ۱۰ - ۶ = ۴$$

بنابراین $|A| = ۴$ و $|A^{-1}| = \frac{۱}{۴}$ در نتیجه $|A^{-1}| = \frac{۱}{|A|}$.

۴۴ الف) این دستگاه شامل دو خط متقاطع است فقط یک جواب دارد. $\Rightarrow \frac{۳}{۲} \neq \frac{-۵}{۱} \Rightarrow$

$$\begin{cases} ۳x - ۵y = -۱ \\ ۲x + y = ۸ \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} ۳ & -۵ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ \\ ۸ \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{ضرب در } A^{-1}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{۱}{۱۳} \begin{bmatrix} ۱ & ۵ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۱ \\ ۸ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = ۳ \\ y = ۲ \end{cases}$$

$$A^{-1} = \frac{۱}{۳ + ۱۰} \begin{bmatrix} ۱ & ۵ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix} = \frac{۱}{۱۳} \begin{bmatrix} ۱ & ۵ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix}$$

ب) این دستگاه شامل دو خط موازی است پس جواب ندارد. $\Rightarrow \frac{۱}{-۲} = \frac{۳}{-۶} \neq \frac{۵}{۱} \Rightarrow$

$$\begin{cases} x + ۳y = ۵ \\ -۲x - ۶y = ۱ \end{cases} \Rightarrow \frac{۱}{-۲} = \frac{۳}{-۶} \neq \frac{۵}{۱} \Rightarrow$$

ج) این دستگاه شامل دو خط منطبق بر هم است پس بی‌شمار جواب دارد.

۴۵ ابتدا ماتریس A^T را به دست می‌آوریم.

$$A^T = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 4I$$

از طرف دیگر داریم.

$$(P^{-1}AP)^T = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) = P^{-1}A \underbrace{(PP^{-1})}_I AP = P^{-1}(AA)P$$

$$P^{-1}A^T P = P^{-1}(4I)P = 4P^{-1}P = 4I = 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A+B = 2AB \xrightarrow[\text{در } A^{-1} \text{ ضرب می‌کنیم}]{\text{طرفین را از چپ}} \underbrace{A^{-1}A}_I + A^{-1}B = \underbrace{2A^{-1}A}_I B \Rightarrow I + A^{-1}B = 2B$$

$$\xrightarrow[\text{از راست ضرب می‌کنیم}]{\text{طرفین را در } B^{-1}} B^{-1} + A^{-1} = 2I$$

۴۷ $|A| \neq 0$ یا مخالف صفر $(0/25)$

$$|A| = 2(4-3) = 2 \xrightarrow{(0/5)} \underbrace{|A^T|}_{(0/25)} = |A|^T = 8 \quad (0/25)$$

$$2x - y = 3 \Rightarrow 4x = 8 \Rightarrow x = 2, y = 1$$

$$2x + y = 5$$

$$z = -2 \Rightarrow x + y + z = 1$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 4 & -7 \\ 1 & 10 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 16 \\ 33 & 48 \end{bmatrix} \Rightarrow AB = AC \not\Rightarrow B = C$$

$$AC = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -7 \\ 1 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 16 \\ 33 & 48 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = [b_{ij}]_{2 \times 2} \quad C = [c_{ij}]_{2 \times 2}$$

$$AB = AC = \overline{O} \not\Rightarrow B = C$$

$$AB - AC = \overline{O} \Rightarrow A(B - C) = \overline{O} \not\Rightarrow \begin{cases} A = \overline{O} \\ B = C \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 11 & 16 & 3 \\ 7 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B \times A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 19 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} r_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & r_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & r_3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} r_1 b_{11} & r_1 b_{12} & r_1 b_{13} \\ r_2 b_{21} & r_2 b_{22} & r_2 b_{23} \\ r_3 b_{31} & r_3 b_{32} & r_3 b_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{سطر اول } B \text{ در } r_1 \text{ ضرب می شود} \\ \text{سطر دوم } B \text{ در } r_2 \text{ ضرب می شود} \\ \text{سطر سوم } B \text{ در } r_3 \text{ ضرب می شود} \end{array}$$

$$B \times A = \begin{bmatrix} r_1 b_{11} & r_2 b_{12} & r_3 b_{13} \\ r_1 b_{21} & r_2 b_{22} & r_3 b_{23} \\ r_1 b_{31} & r_2 b_{32} & r_3 b_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{سطر اول } B \text{ در } r_1 \text{ ضرب می شود} \\ \text{سطر دوم } B \text{ در } r_2 \text{ ضرب می شود} \\ \text{سطر سوم } B \text{ در } r_3 \text{ ضرب می شود} \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} r & \cdot & \cdot \\ \cdot & r & \cdot \\ \cdot & \cdot & r \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} r & \cdot & \cdot \\ \cdot & r & \cdot \\ \cdot & \cdot & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rb_{11} & rb_{12} & rb_{13} \\ rb_{21} & rb_{22} & rb_{23} \\ rb_{31} & rb_{32} & rb_{33} \end{bmatrix} = rB$$

$$B \times A = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r & \cdot & \cdot \\ \cdot & r & \cdot \\ \cdot & \cdot & r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rb_{11} & rb_{12} & rb_{13} \\ rb_{21} & rb_{22} & rb_{23} \\ rb_{31} & rb_{32} & rb_{33} \end{bmatrix} = rB$$

$$\Rightarrow A \times B = B \times A = rB$$

$$(A+B)^T = (A+B)(A+B) = A^T + AB + BA + B^T \xrightarrow[\text{تغویض پذیری}]{A, B} A^T + {}^TAB + B^T$$

$$(A-B)(A+B) = A^T - AB + BA + B^T \xrightarrow[\text{تغویض پذیری}]{A, B} A^T - B^T$$

$${}^T \times \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} - {}^T \times \frac{1}{17} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{14} & \frac{-3}{14} \\ \frac{-2}{14} & \frac{4}{14} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{17} & \frac{-9}{17} \\ \frac{15}{17} & \frac{6}{17} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{85+21}{119} & \frac{-51-63}{119} \\ \frac{-34+105}{119} & \frac{68+42}{119} \end{bmatrix} = \frac{1}{119} \begin{bmatrix} 106 & -114 \\ 71 & 110 \end{bmatrix}$$

$$\text{الف) } A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{array}{l} a \ b \\ d \ e \\ g \ h \end{array}$$

$$\Rightarrow |A| = (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi)$$

$$B = \begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \Rightarrow |B| = \begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{array}{l} ka \ kb \\ d \ e \\ g \ h \end{array}$$

$$\Rightarrow |B| = (kaei + kbfg + kcdh) - (kceg + kafh + kbdi)$$

$$= k(aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi) = k|A| \Rightarrow |B| = k|A|$$

$$\text{ب) } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ad - bc$$

$$B = \begin{bmatrix} ka & kb \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow |B| = kad - kbc = k(ad - bc) = k|A|$$

$$\begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ 4x + 2y = 10 \end{cases} \quad |A| = 3 \times 2 - (-5) \times 4 = 6 + 20 = 26$$

$$A^{-1} = \frac{1}{26} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{13} & \frac{5}{26} \\ -\frac{2}{13} & \frac{3}{26} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{13} & \frac{5}{26} \\ -\frac{2}{13} & \frac{3}{26} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2+50}{26} \\ \frac{-4+30}{26} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{الف) } A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 3 + 10 = 13 \neq 0$$

دستگاه یک جواب منحصر به فرد دارد. $\frac{3}{2} \neq \frac{-5}{1} \Rightarrow$

$$A^{-1} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{13} & \frac{5}{13} \\ -\frac{2}{13} & \frac{3}{13} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{13} & \frac{5}{13} \\ -\frac{2}{13} & \frac{3}{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1+40}{13} \\ \frac{2+24}{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x=3 \\ y=2 \end{matrix}$$

دو خط بر هم منطبقند پس دستگاه بی‌شمار جواب دارد. $\frac{-2}{4} = \frac{3}{-6} = \frac{2}{-4}$ ب)

دو خط با هم موازیند پس دستگاه جواب ندارد. $\frac{1}{-2} = \frac{3}{-6} \neq \frac{5}{-1}$ پ)

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 17 & 8 \end{bmatrix}$$

$$|BA| = 3(-10) - 1(-10) - 1(-20) = 0$$

$$A^T = B \rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 4a+b \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a+b=5 \\ 4a+b=5 \end{cases} \rightarrow a=0, b=5$$

ت) کانون سهمی

پ) بیرون

ب) اسکالر

$$\begin{cases} m-2=0 \rightarrow m=2 \\ n+1=0 \rightarrow n=-1 \end{cases}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow |B| = 2(-1) - 1(7) + 1(-2) = -11, |A| = 2$$

$$|A| + |B| = 2 + (-11) = -9$$

$$\text{الف) } |A| = 5|A| - 24 \Rightarrow |A| = 6$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 & -8 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$$

ب) ماتریس A وارون‌پذیر است و وارون آن برابر است با:

۶۵

$$\text{الف) } \frac{3m}{2} \neq \frac{3}{-1} \Rightarrow m \neq -3$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = -10 \neq 0, A^{-1} = \frac{1}{-10} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{ب) } \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{-10} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

ت) نقطه

پ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{5}{8}$ ۶۶ الف) $m = 1$

۶۷

$$\begin{bmatrix} x & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = [x - 3 \ 12] \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = [3x - 21] = 0 \Rightarrow x = 7$$

۶۸

دترمینان ماتریس A را برحسب ستون اول به دست می‌آوریم.

$$|A| = 2 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times 10 = 20, |B| = -6 \Rightarrow |B^T| = 26$$

$$|A| + |B^T| = 56$$

۶۹

$$\left. \begin{aligned} A^T &= \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} \\ mA + nI &= \begin{bmatrix} 0 & 4m \\ 2m & m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & 4m \\ 2m & m+n \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow n = 8, m = 1$$

$$\begin{bmatrix} 2x & 4x - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & y - 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 4 \Rightarrow x = 2 \\ 4x - 2 = y - 2 \Rightarrow y = 8 \end{cases}$$

۷۰

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, |A| = 3 + 10 = 13 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1} \times B = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} -1 + 40 \\ 2 + 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow x = 3, y = 2$$

۷۱

ت) ۶

پ) دایره

ب) خط

۷۲ الف) ۸

۷۳

$$\begin{cases} m - 2 = 0 \\ n + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = -1 \end{cases}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 6 & 0 & -3 \\ 9 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3+8} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

۷۴

ت)

پ) پاره خط (ص ۴۹)

ب) مشترک (ص ۳۶)

۷۵ الف) قطری (ص ۱۲)

yoz (ص ۷۳)

ت) صفر

پ) خارج

ب) مشترک

۷۶ الف) ماتریس

۷۷

$$A = B \rightarrow \begin{bmatrix} 2x & 5 \\ z & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2x + y \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 3 \\ 2x + y = 5 \\ z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x + 2y + 3z = \frac{-1}{2}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow |AB| = 4(6) - 1(-6) + 5(-6) = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow X = A^{-1}B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 4 + 3a & -8 + 2a \\ b - 2 & -2b - 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4a - 8 = 0 \Rightarrow a = 2 \\ b - 2 = 0 \Rightarrow b = 2 \end{cases} \text{ (ص ۲۱)}$$

$$2x - 1 = 5 \Rightarrow x = 3 \text{ (ص ۱۳)}$$

$$(A - B)^T = (A - B)(A - B) = A^T - AB - BA + B^T \xrightarrow{AB=BA} A^T - 2AB + B^T$$

(ص ۲۱)

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A - 2I| = 2 \Rightarrow (A - 2I)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ (ص ۲۳)}$$

$$m - 2 = 0 \Rightarrow m = 2n = m = 2 \text{ (ص ۱۲)}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \text{ (ص ۲۱)}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 1$$

$$k|kA| = k(k^T|A|) = k^6 \times 1 = 645 \Rightarrow k = \pm 5 \text{ (ص ۳۱)}$$

$$|A| = |A|(|A| - 2) + 1(2) \Rightarrow |A|^T - 2|A| + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} |A| = 1 \\ |A| = 2 \end{cases} \text{ (ص ۲۸ و ۳۰)}$$

۱- (ص ۲۸) ۸۸

نادرست (ص ۲۳) ۸۹

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ ماتریس تعیین اعداد}$$

۱۲ = مجموع درایه ها

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 + 3a & -8 + 2a \\ b - 2 & -2b - 2 \end{bmatrix}$$

$$-8 + 2a = 0 \Rightarrow a = 4$$

$$b - 2 = 0 \Rightarrow b = 2$$

$$|A| = 2 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow 2A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$|B| = 3 \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow 3B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2A^{-1} - 3B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & x-3 & x-2 \\ x+3 & 0 & -4 \\ x+2 & 6 & 0 \end{vmatrix} = -(x-3) \begin{vmatrix} x+3 & -4 \\ x+2 & 0 \end{vmatrix} + (x-2) \begin{vmatrix} x+3 & 0 \\ x+2 & 6 \end{vmatrix}$$

بسط روی سطر اول ۹۳

$$-(x-3)(4(x+2) + (x-2)(6))$$

$$2x^2 + 10x - 12 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ یا } x = -6$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} \quad (\text{ص ۲۸ و ۲۹})$$

$$\text{الف) } A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -5 & -4 & 3 \\ 4 & 11 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\text{ب) } \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$|B| = (-1 + 1 - 8) - (-2 - 2 + 2) = -6$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{ص ۲۴})$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6-4} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$|2A| + |A^{-1}|^2 = 2^2 |A| + \frac{1}{|A|^2} = 8(-2) + \frac{1}{-8} = \frac{-129}{8} \quad (\text{ص ۳۱})$$

اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، داریم: ۹۷

$$A \times B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \overline{O}$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \frac{-1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{-1}{12} \neq 0 \Rightarrow \text{دستگاه جواب منحصر به فرد دارد.}$$

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -12 \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 6 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -9 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}, A^T - 2I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{-۴}{۲} \neq \frac{m-۳}{-\frac{(m-۳)}{۲}} \Rightarrow -۲ \neq -۲$$

روش دوم: به ازای هیچ m ای دترمینان زیر مخالف صفر نمی‌شود.

$$\left| \begin{array}{cc} -۴ & m-۳ \\ ۲ & -\frac{m-۳}{۲} \end{array} \right| = -۴ \left(-\frac{m-۳}{۲} \right) - ۲(m-۳) = ۰$$