پاسخنامه تشریحی

۱

$$\left.\begin{array}{l} a = ۲k \text{ زوج} \\ b = ۲q \text{ زوج} \end{array}\right\} \Rightarrow a + b = ۲k + ۲q = ۲\underbrace{(k + q)}_{q'} = ۲q' \text{ . زوج}$$

۲ نتیجه درست است زیرا:

$$a = ۲k + ۱ \text{ فرد} \Rightarrow a + ۱ = (۲k + ۱) + ۱ = ۲k + ۲ = ۲(k + ۱) = ۲k' \text{ زوج}$$

۳ نتیجه درست است زیرا:

$$\begin{cases} ۰ < x_{\text{حاده}} < ۹۰ \\ ۰ < y_{\text{حاده}} < ۹۰ \end{cases} \Rightarrow ۰ < x + y < ۱۸۰^\circ$$

۴ نتیجه درست نیست زیرا در هر مستطیل طول با عرض برابر نیست.

۵ نتیجه درست است زیرا در هر مربع همه‌ی زوایا قائمه‌اند و اضلاع روبه‌رو برابرند پس مربع نوعی مستطیل است.

۶ نتیجه درست نیست. مثال نقض: $(x = ۰) \in Z \Rightarrow x^۲ = ۰$

۷ نتیجه درست نیست. مثال نقض:

$x = ۱/۵ \Rightarrow ۱/۵ > ۱$ و $۱/۵ \cancel{>} ۲$

۸ نتیجه درست است: $\begin{array}{l} x > ۲ \\ ۲ > ۱ \end{array} \Rightarrow x > ۱$ اثبات/

۹

فرض خلف: $n = ۳$ مضرب نباشد $\Rightarrow n = ۳k + r, r \neq ۰$

$$\Rightarrow n^۲ = \underbrace{۹k^۲ + ۶k.r}_{۳q} + r^۲ = ۳q + r^۲ \neq ۳q'$$

یعنی $n^۲$ مضرب ۳ نیست که متناقض با فرض مسئله است پس فرض خلف غلط است.

۱۰ بلی - می‌دانیم $۰ = b \times ۰$ یعنی $b|۰$ (تمام اعداد صحیح مقسوم علیه صفر هستند).

۱۱

$a|b \to b = aq \xrightarrow{\times c} bc = acq \to ac|bc$

$ac|bc \to bc = acq' \xrightarrow{c \neq ۰} b = aq' : a|b$

۱۲

$۹۵۵۵ = ۳ \times ۵ \times ۷^۲ \times ۱۳$

۱۳ $N = P_{۱}^{\alpha_۱} \times P_{۲}^{\alpha_۲} \times \ldots \times P_{n}^{\alpha_n} \Rightarrow N = P_{۱}^{(۲k_۱ + r_۱)} \times \ldots \times P_{n}^{(۲k_n + r_n)}$

α_i یا زوجند یا فرد پس می‌توانیم آنها را چنین بنویسیم: $\alpha_i = ۲k_i + r_i : r_i = \begin{cases} ۰ \\ \text{یا} \\ ۱ \end{cases}$

$$\Rightarrow N = P_{۱}^{۲k_۱} \times P_{۲}^{۲k_۲} \times \ldots \times P_{n}^{۲k_n} \times \left(P_{۱}^{r_۱} \times \ldots \times P_{n}^{r_n}\right)$$

$$\Rightarrow N = \underbrace{\left(P_{۱}^{k_۱} \times P_{۲}^{k_۲} \times \ldots \times P_{n}^{k_n}\right)^{۲}}_{\text{مربع کامل}} \times \underbrace{\left(P_{۱}^{r_۱} \times P_{۲}^{r_۲} \times \ldots \times P_{n}^{r_n}\right)}_{\text{غیرمربع}}$$

۱۴
$$(a,b) = ۱ \xrightarrow{\exists x \text{ و } y} ax + by = ۱$$
$$\xrightarrow{\times} a^{۲}nm + acnx + abym + bcyn = ۱$$
$$(a,c) = ۱ \xrightarrow{\exists m \text{ و } n} am + cn = ۱$$
$$: aq + bcq' = ۱ \xrightarrow[\text{عدد شده است پس نسبت به هم اول‌اند ۱۲}]{\text{ترکیب خطی}} (a, bc) = ۱$$

۱۵
$$\left.\begin{array}{r} a \overset{۷}{\equiv} ۵ \\ b \overset{۷}{\equiv} -۲ \xrightarrow{\times ۲} ۲b \overset{۷}{\equiv} -۴ \end{array}\right\} \Rightarrow a + ۲b \overset{۷}{\equiv} ۱$$

۱۶
$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m|a - b \Rightarrow a - b = mq \xrightarrow{\times c} ac - bc = mqc = mq'$$
$$\Rightarrow m|ac - bc \Rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bc$$

۱۷
$$(a \pm b)^{۲} = a^{۲} \pm \cancel{۲ab}^{۰} + b^{۲} \overset{ab}{\equiv} a^{۲} + b^{۲}$$

۱۸
$$۲^{۱۱} = ۲^{۵} \times ۲^{۵} \times ۲ = ۳۲ \times ۳۲ \times ۲ \overset{۲۳}{\equiv} ۹ \times ۹ \times ۲ = ۸۱ \times ۲ \overset{۲۳}{\equiv} ۱۲ \times ۲ = ۲۴ \overset{۲۳}{\equiv} ۱$$
$$\Rightarrow ۲^{۱۱} - ۱ \overset{۲۳}{\equiv} ۰$$

توجه: $\left.\begin{array}{l} a \overset{m}{\equiv} b \\ c \overset{m}{\equiv} d \end{array}\right\} \Rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bd$

۱۹ شرط وجود جواب برای معادله‌ی سیاله‌ی $ax + by = c$ آن است که $(a,b)|c$.

$$\begin{cases} ۲x + ۵y = ۱۱ \\ \text{شرط جواب } (۲, ۵) = ۱|۱۱ \end{cases} \xrightarrow{\text{در پیمانه ۲}} ۲x + ۵y \overset{۲}{\equiv} ۱۱ \rightarrow ۰ + y \overset{۲}{\equiv} ۱ : y = ۲k + ۱$$
$$\xrightarrow{\text{جاگذاری}} x = -۵k + ۳$$

۲۰ شرط وجود جواب برای معادله‌ی سیاله‌ی $ax+by=c$ آن است که $(a,b)|c$.

$$\begin{cases} ۲۱x+۱۴y=۱۴۷ \\ (۲۱,۱۴)=۷|۱۴۷ \end{cases} \xrightarrow{\div ۷} ۳x+۲y=۲۱ \xrightarrow{\text{پیمانه ۲}} ۳x+\cancel{۲y}^{\,۰} \overset{۲}{\equiv} ۲۱ : x \overset{۲}{\equiv} ۱ : x=۲k+۱$$

$$\xrightarrow{\text{جاگذاری}} y=-۳k+۹$$

۲۱ اثبات بازگشتی:

$$x^۲+y^۲\geq ۲(x+y-۱) \Leftrightarrow x^۲+y^۲-۲x-۲y+۲\geq ۰$$

$$\Leftrightarrow x^۲+۱-۲x+y^۲-۲y+۱\geq ۰ \Leftrightarrow (x-۱)^۲+(y-۱)^۲\geq ۰ \text{ همواره برقرار است}$$

۲۲

$$x=۲k+۱ \quad ,y=۲k'+۱ \quad \Rightarrow x\times y=(۲k+۱)(۲k'+۱)=۴kk'+۲k+۲k'+۱$$

$$x\times y-۱=۴kk'+۲k+۲k'+۱-۱=۲(kk'+k+k')=۲k''$$

۲۳ اثبات بازگشتی:

$$(x-y)^۲\geqslant ۰ \longleftrightarrow x^۲+y^۲-۲xy\geqslant ۰ \Leftrightarrow ۲xy\leqslant x^۲+y^۲ \longleftrightarrow xy\leqslant \frac{۱}{۲}(x^۲+y^۲)$$

۲۴

$$y^۲+۱\geqslant ۲xy-۲x^۲+۲x \to y^۲+۱-۲xy+۲x^۲-۲x\geqslant ۰$$

$$y^۲-۲xy+x^۲+x^۲-۲x+۱\geqslant ۰$$

اثبات بازگشتی: $\Leftrightarrow$ بدیهی $(y-x)^۲+(x-۱)^۲\geqslant ۰$

۲۵ برهان خلف: فرض می‌کنیم $\sqrt{\sqrt{۲}+۱}$ گویا است.

فرض خلف : $\sqrt{\sqrt{۲}+۱}=\frac{a}{b} \quad a,b\in Z \quad b\neq ۰ \quad (a,b)=۱$

$\sqrt{۲}+۱=\frac{a^۲}{b^۲}\to \sqrt{۲}=\frac{a^۲}{b^۲}-۱=\frac{a^۲-b^۲}{b^۲}$ عدد گویا

$\sqrt{۲}$ عدد گنگ است، به تناقض می‌رسیم پس فرض خلف نادرست و حکم درست است.

۲۶ فرض می‌کنیم x و y دو عدد فرد باشند در این صورت:

$$\left.\begin{matrix} x=۲k+۱ \\ y=۲k'-۱ \end{matrix}\right\} \Rightarrow x+y=(۲k+۱)+(۲k'-۱)=۲k+۲k'+۱-۱=۲k+۲k'=$$

پس عددی زوج است $\quad ۲(k+k')=۲k''$

۲۷

$$x=۲k+۱ \quad x.y+۱=(۲k+۱)(۲k'+۱)+۱=۴kk'+۲k+۲k'+۲$$

$$y=۲k'+۱ \quad x.y+۱=۲(۲kk'+k+k'+۱)=۲k''$$

۲۸ اگر $\sqrt[۷]{۳}$ گنگ نباشد پس گویا است. $\quad \sqrt[۷]{۳}=\frac{p}{q}\sqrt{۳}=\frac{p}{\sqrt[۷]{q}} ,p,q\in Z,q\neq ۰$

به یک تناقض رسیده‌ایم پس حکم برقرار است و فرض خلف باطل است. $\quad \Rightarrow \sqrt{۳}=\frac{P}{k}\in Q$

۲۹ می‌دانیم AD نیمساز زوایه $\widehat{A}$ و $BD\neq CD$ می‌باشد. فرض خلف: $AB=AC$

بنابراین مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ متساوی‌الساقین است و می‌دانیم، در مثلث متساوی‌الساقین نیمساز AD میانه است. پس $BD=CD$ که با فرض مسأله در تضاد است، بنابراین فرض خلف باطل است یعنی: $AB\neq AC$.

۳۰

$n = ۲k + ۱ \to n^۲ = (۲k+۱)^۲ = ۴k^۲ + ۴k + ۱ \to n^۲ - ۱ = ۴k^۲ + ۴k$

$\Rightarrow n^۲ - ۱ = ۲(۲k^۲ + ۲k) = ۲k'$

۳۱ از برهان خلف استفاده می‌کنیم و می‌گوییم اگر مضرب ۳ نباشد، پس:

$n = ۳k+۱ \Rightarrow n^۲ = (۳k+۱)^۲ \Rightarrow n^۲ = ۹k^۲+۶k+۱ \Rightarrow n^۲ = ۳(۳k^۲+۲k)+۱ \Rightarrow n^۲ \neq ۳k'$

$n = ۳k+۲ \Rightarrow n^۲ = (۳k+۲)^۲ \Rightarrow n^۲ = ۹k^۲+۱۲k+۴ \Rightarrow n^۲ = ۳(۳k^۲+۴k+۱)+۱ \Rightarrow n^۲ \neq ۳k'$

هر دو رابطه‌ی اخیر خلاف فرض هستند، پس حکم برقرار است.

۳۲

$۲x^۲ + ۲y^۲ + ۲ \geqslant ۲xy + ۲x + ۲y \Leftrightarrow$

$(x^۲ - ۲xy + y^۲) + (x^۲ - ۲x + ۱) + (y^۲ - ۲y + ۱) \geqslant ۰ \Leftrightarrow$

$(x-y)^۲ + (x-۱)^۲ + (y-۱)^۲ \geqslant ۰$ بدیهی است.

۳۳ الف) نادرست $۱^۲ = ۱^۳$

ب) درست $\begin{matrix} x = ۲k \\ y = ۲k' \end{matrix} \quad xy = ۴kk' = ۲(۲kk') = ۲k''$

۳۴

$x = ۲k + ۱$ ۰/۲۵

$x^۲ + ۳ = (۲k+۱)^۲ + ۳ = ۴k^۲ + ۴k + ۱ + ۳ = ۴(k^۲ + k + ۱) = ۴k'$ ۰/۲۵

۰/۲۵ ۰/۲۵

۳۵ از برهان خلف استفاده کرده و می‌گوییم اگر $y \neq ۱$ نباشد پس $y = ۱$. ۰/۲۵

$y = ۱ \Rightarrow x^۳ + (۱)^۳ = ۶۵ \Rightarrow x^۳ = ۶۴ \Rightarrow x = ۴$ ۰/۲۵

این تساوی با فرض مسئله تناقض دارد پس حکم برقرار است یعنی $y \neq ۱$. ۰/۲۵

۳۶

$(a-۱)^۲ + (b-۱)^۲ + (c-۱)^۲ \geqslant ۰ \Leftrightarrow$ ۰/۲۵

$a^۲ - ۲a + ۱ + b^۲ - ۲b + ۱ + c^۲ - ۲c + ۱ \geqslant ۰ \Leftrightarrow$

$a^۲ + b^۲ + c^۲ + ۳ - ۲a - ۲b - ۲c \geqslant ۰ \Leftrightarrow$ ۰/۲۵

$a^۲ + b^۲ + c^۲ + ۳ \geqslant ۲a + ۲b + ۲c \Leftrightarrow$ ۰/۲۵

$a^۲ + b^۲ + c^۲ + ۳ \geqslant ۲(a+b+c)$ ۰/۲۵

۳۷ اگر $a^۲ + \sqrt{۳}$ عدد گنگ نباشد پس گویا است یعنی: $a^۲ + \sqrt{۳} = \frac{p}{q} \Rightarrow \begin{cases} p \text{ و } q \in z \\ q \neq ۰ \end{cases}$ ۰/۲۵

$\sqrt{۳} = \frac{p}{q} - a^۲$ ۰/۲۵ $\sqrt{۳} = \frac{p - qa^۲}{q}$ ۰/۲۵ $\Rightarrow \sqrt{۳} = \frac{a'}{q} \begin{cases} a' \text{ و } q \in z \\ q \neq ۰ \end{cases}$

$\sqrt{۳}$ یک عدد گویا شده که تناقض با فرض مسئله دارد. پس فرض خلف باطل بوده و حکم برقرار است یعنی $a^۲ + \sqrt{۳}$ گنگ است. ۰/۲۵

۳۸ برهان خلف: فرض می‌کنیم $۲ + \sqrt{۵}$ گنگ نباشد، پس داریم: ۰/۲۵

$۲ + \sqrt{۵} = \frac{a}{b}$ گویا $\Rightarrow \sqrt{۵} = \frac{a}{b} - ۲$ ۰/۲۵

۰/۵ گویا = گنگ

و به تناقض می‌رسیم پس $۲ + \sqrt{۵}$ گنگ است. ۰/۲۵

۳۹ $xy \leqslant \left(\frac{(x+y)}{۲}\right)^۲ \Rightarrow xy \leqslant \frac{x^۲+y^۲+۲xy}{۴}$ ۰/۲۵

$\Rightarrow ۴xy \leqslant x^۲+y^۲+۲xy$ ۰/۲۵

$x^۲+y^۲-۲xy \geqslant ۰$ ۰/۲۵ $(x-y)^۲ \geqslant ۰$ ۰/۲۵ بدیهی است

۴۰ $(a-۱)^۲ \geqslant ۰$ ۰/۲۵ $\Leftrightarrow a^۲-۲a+۱ \geqslant ۰ \Leftrightarrow$

$a^۲+۱ \geqslant ۲a$ ۰/۲۵ طرفین این نامعادله را بر a تقسیم می‌کنیم

$\Leftrightarrow \frac{a^۲}{a}+\frac{۱}{a} \geqslant \frac{۲a}{a}$ ۰/۲۵ $\Leftrightarrow a+\frac{۱}{a} \geqslant ۲$ ۰/۲۵

۴۱ اگر $\sqrt{۳+\sqrt{۷}} \notin Q$ ' ۰/۲۵ $\Rightarrow \sqrt{۳+\sqrt{۷}} \in Q \Rightarrow \sqrt{۳+\sqrt{۷}} = \frac{a}{b}\ (a,b)=۱$ ۰/۲۵

$۳+\sqrt{۷} = \frac{a^۲}{b^۲} \Rightarrow \sqrt{۷} = \frac{a^۲}{b^۲}-۳$ تناقض ۰/۲۵

۰/۲۵

گویا = گنگ

۴۲ نادرست (۰/۲۵) و مثال نقض: ۲ و ۳ هر دو اول هستند و ۵ = ۳ + ۲ هم اول است. (۰/۲۵)

۴۳ درست (۰/۲۵) و استدلال استنتاجی:

$$\underset{(۰/۲۵)}{x = ۲k+۱} \Rightarrow \underset{(۰/۲۵)}{(۲k+۱)(۲k+۳)} = ۴k^۲+۸k+۳ = ۲\left(۲k^۲+۴k+۱\right)+۱ = \underset{(۰/۲۵)}{۲k'+۱}$$

۴۴ $\underset{۰/۲۵}{(۲K)(۲K+۲)} = \underset{۰/۲۵}{(۴K^۲+۴K)} = ۴K(K+۱) = \underset{۰/۲۵}{۴(۲K')} = \underset{۰/۲۵}{۸K'}$

۴۵ فرض خلف : $n \neq ۲k+۱ \Rightarrow n = ۲k$ ۰/۲۵

$۵n+۳ = ۵(۲k)+۳ = ۱۰k+۳ = ۲(۵k+۱)+۱ = ۲q+۱$ ۰/۲۵

۰/۲۵

این تناقض نشان می‌دهد که فرض خلف نادرست است.

۴۶ درست ۰/۲۵

۴۷ $۲a^۲+b^۲+۱ \geqslant ۲(a-ba) \Rightarrow ۲a^۲+b^۲+۱+۲ab-۲a \geqslant ۰ \Rightarrow (a-۱)^۲+(a+b)^۲ \geqslant ۰$

۰/۲۵ ۰/۲۵

درستی عبارت بدیهی است. بنابراین تمامی روابط برگشت‌پذیر است. ۰/۵

۴۸ $۲۷ \overset{۱۰}{\equiv} -۳ \rightarrow ۲۷^۲ \overset{۱۰}{\equiv} ۹ \rightarrow ۲۷^۲ \overset{۱۰}{\equiv} -۱ \rightarrow \left(۲۷^۲\right)^{۶۹۳} = ۲۷^{۱۳۸۶} \overset{۱۰}{\equiv} -۱ \overset{۱۰}{\equiv} ۹$

$(۱۳,۱۷)=۱ \Rightarrow ۱۱۰۰$ ۴۹

$$۱۳x=۱۰۰-۱۷y \Rightarrow x=\frac{۹۱+۹-۱۳y-۴y}{۱۳}=۷-y+\frac{۹-۴y}{۱۳}$$

$$\frac{۹-۴y}{۱۳}=m \Rightarrow y=\frac{۹-۱۳m}{۴}=\frac{۸+۱-۱۲m-m}{۴}=۲-۳m+\frac{۱-m}{۴}$$

$$\frac{۱-m}{۴}=k \Rightarrow m=۱-۴k \Rightarrow y=۱۳k-۱ \text{ و } x=۹-۱۷k$$ که $k,m\in Z$

روش دوم: $۱۳x+۱۷y=۱۰۰ \xrightarrow[\text{می رویم}]{\text{به پیمانه ۱۳}} \cancel{۱۳x}+۱۷y \overset{۱۳}{\equiv} ۱۰۰$

$$۴y \overset{۱۳}{\equiv} -۴ \overset{\div ۴}{\rightarrow} y \overset{۱۳}{\equiv} -۱ \Rightarrow y=۱۳k-۱$$

$x=۲k+۱ \Rightarrow x^۲=(۲k+۱)^۲=۴k^۲+۴k+۱=۴k(k+۱)+۱=۴(۲q)+۱=۸q+۱$ ۵۰

$(a,b)=۱ \Rightarrow \exists m,n\in z \;;\; ma+nb=۱ \;(۱)$ ۵۱

$(a,c)=۱ \Rightarrow \exists x,y\in z \;;\; xa+yc=۱ \;(۲)$

$$(۱)\times(۲) \Rightarrow mxa^۲+nyac+nxab+nybc=۱ \Rightarrow a(\underbrace{max+myc+nxb}_{t})+bc(\underbrace{ny}_{p})=۱$$

$$\Rightarrow at+(bc)p=۱ \Rightarrow (a,bc)=۱$$

$a\mid b \Rightarrow \exists q\in z \;;\; b=aq$ ۵۲

$c\mid b \Rightarrow \exists t\in z \;;\; b=ct$

$$(a,c)=۱ \Rightarrow \exists m,n\in z \;;\; ma+nc=۱ \overset{\times b}{\rightarrow} mab+nbc=b \Rightarrow$$

$$mact+nacq=b \Rightarrow ac(mt+nq)=b \Rightarrow ac\mid b$$

$$\left.\begin{array}{l} ۳^۲ \overset{۱۰}{\equiv} -۱ \Rightarrow ۳^{۲۴} \overset{۱۰}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۳^{۲۵} \overset{۱۰}{\equiv} ۳ \\ ۷^۲ \overset{۱۰}{\equiv} -۱ \Rightarrow ۷^{۷۲} \overset{۱۰}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۷^{۷۳} \overset{۱۰}{\equiv} ۷ \end{array}\right. \Rightarrow ۳^{۲۵}+۷^{۷۳} \overset{۱۰}{\equiv} ۰$$ ۵۳

$ac \overset{m}{\equiv} bc : m\mid ac-bc \xrightarrow{\div d=(m,c)}$ ۵۴

$$\frac{m}{d}\,\Big|\,\frac{c}{d}(a-b) \text{ و } \left(\frac{m}{d},\frac{c}{d}\right)=۱$$

بنا به لم اقلیدس داریم: $\overset{\text{لم}}{\rightarrow} \frac{m}{d}\,\Big|\,a-b \Rightarrow a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b$

$$\left.\begin{array}{l} a=۶k+۵ \\ b=۶q+۵ \end{array}\right. \Rightarrow a\times b=\underbrace{۳۶kq+۳۰k+۳۰q+\underset{۲۴+۱}{\cancel{۲}۵}}_{\text{فاکتور ۶ می دهند.}}=۶q'+۱$$ ۵۵

۵۶

$$(a,b)=d \Rightarrow \begin{cases} d\mid a \\ d\mid b \xrightarrow{b\mid c} d\mid c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d\mid a+c \\ \text{از طرفی } d\mid b \end{cases} \Rightarrow d\mid (a+c,b): d\mid d' \quad \text{(I)}$$

$$(a+c,b)=d' \Rightarrow \begin{cases} d'\mid a+c \\ d'\mid b \xrightarrow{b\mid c} d'\mid c \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} \begin{cases} d'\mid a \\ \text{از طرفی } d'\mid b \end{cases} \Rightarrow d'\mid (a,b): d'\mid d \quad \text{(II)}$$

$$\xrightarrow[\text{II}]{\text{I}} d=d'$$

توجه:

$$\begin{cases} (1)\ \begin{matrix} a\mid b \\ a\mid c \end{matrix} \Rightarrow a\mid bx+cy \\ (2)\ \begin{matrix} a\mid b \\ a\mid c \end{matrix} \Rightarrow a\mid (b,c) \end{cases}$$

۵۷

$$\begin{cases} (a,b)=1 \xrightarrow{\text{بزو}} \exists x \text{ و } y\in \mathbb{Z}: ax+by=1 \xrightarrow{\times c} acx+bcy=c \quad : a(cx+qy)=c \\ a\mid bc \Rightarrow bc=aq \quad : aq'=c \Rightarrow a\mid c \end{cases}$$

۵۸ نادرست (۰/۲۵) یک مثال نقض ارائه شود، مثل $x=4, y=0 \Longleftarrow xy=0$ (۰/۲۵)

۵۹

$$\left.\begin{matrix} \text{فرض } \sqrt{7}\in Q' \ , \ x\in Q \\ \text{حکم } x+\sqrt{7}\in Q' \end{matrix}\right\} \ (0/25)$$

$$\text{خلاف حکم } x+\sqrt{7}=\frac{a}{b}\in Q \Rightarrow \sqrt{7}=\frac{a}{b}-x \Rightarrow$$

(۰/۲۵)

تفریق دو گویا، گویا است و مساوی گنگ نمی‌شود پس به تناقض رسیده یعنی حکم برقرار است. (۰/۲۵)

۶۰ درست (۰/۲۵)

۶۱ فرض خلف: فرض کنیم $\sqrt{3}$ عددی گویا باشد. صفحه ۲۸

$$\sqrt{3}=\frac{a}{b},(a,b)=1(0/25) \Rightarrow a^2=3b^2 \Rightarrow a^2 \text{ مضرب } 3 \text{ است} \Rightarrow a \text{ مضرب } 3 \text{ است} (0/25)$$

$$\Rightarrow a=3k \Rightarrow 9k^2=3b^2 \Rightarrow b^2 \text{ مضرب } 3 \text{ است} \Rightarrow b \text{ مضرب } 3 \text{ است} (0/25)$$

$$\Rightarrow (a,b)\neq 1 \text{ تناقض} (0/25)$$

۶۲

$$\begin{matrix} m=13q_1+2 \\ n=13q_2+9 \end{matrix} (0/5) \begin{matrix} 3m=13(3q_1)+6 \\ 5n=13(5q_2)+45 \end{matrix} (0/5) \rightarrow 5n-3m=13q'+39(0/25)$$

(صفحه‌ی: ۱۴)

$$\rightarrow 5n-3m=13q''+0 \rightarrow r=0(0/25)$$

۶۳ روز اول مهر، شنبه را برابر صفر در نظر می‌گیریم ۲۹ روز در مهر و سه ماه آبان و آذر و دی و ۱۲ بهمن، فاصله اول مهر تا ۱۲ بهمن است، پس داریم:

ج	پ	چ	س	د	ی	ش
۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰

(۰/۲۵)

$۲۹+۳۰+۳۰+۳۰+۱۲=۱۳۱ \to ۱۳۱ \overset{۷}{\equiv} ۵$ (۰/۵)

که متناظر این عدد در جدول روز پنج‌شنبه را نشان می‌دهد. (۰/۲۵) (صفحه ۲۴)

۶۴ $\underbrace{۲y \overset{۵}{\equiv} ۱۸}_{(۰/۲۵)} \xrightarrow{(۲,۵)=۱} y \overset{۵}{\equiv} ۹$ (۰/۵) $\Rightarrow y \overset{۵}{\equiv} ۹ \overset{۵}{\equiv} ۴$ (۰/۲۵)

$y=۵k+۴$ (۰/۲۵) و $x=-۲k+۲$(۰/۲۵) (صفحه: ۲۵)

۶۵ فرض کنیم که r یک عدد گویا و x یک عدد گنگ باشد نشان می‌دهیم که $r+x$ یک عدد گنگ است (۰/۲۵)
فرض خلف اگر $r+x$ گنگ نباشد (۰/۲۵) بنابراین عددی گویا است از طرفی میدانیم که تفاضل دو عدد گویا، گویا است (۰/۲۵) پس تفاضل $r+x$ و r باید عددی گویا باشد یعنی $r+x-r \in Q$ (۰/۲۵) و از آنجا $x \in Q$ که با فرض ما در تناقض است در نتیجه فرض خلف باطل است و حکم ثابت می‌گردد (۰/۲۵)

روش دوم:

$x = \frac{m}{n}$ = گویا ; m و $n \in Z$

y = گنگ

فرض خلف : $x+y$ = گنگ نیست

$$\Rightarrow x+y = \text{گویا} = \frac{a}{b}, a,b \in Z \Rightarrow \frac{m}{n}+y=\frac{a}{b} \Rightarrow y=\frac{a}{b}-\frac{m}{n}=\frac{\overbrace{an-bm}^{\in Z}}{\underbrace{bn}_{\in Z}} = \text{گویا}$$

$\Rightarrow$ تناقض با گنگ بودن y

۶۶ الف) x و y هم‌علامتند، بنابراین $xy>۰$ خواهد بود.

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq ۲ \Leftrightarrow xy\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\geq ۲xy \Leftrightarrow x^۲+y^۲\geq ۲xy \Leftrightarrow x^۲+y^۲-۲xy\geq ۰$$

$\Leftrightarrow (x-y)^۲ \geq ۰$ همیشه درست

ب) ابتدا طرفین نامساوی را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$x^۲+y^۲+z^۲\geq xy+yz+zx \Rightarrow ۲x^۲+۲y^۲+۲z^۲\geq ۲xy+۲yz+۲zx$$

$$\Rightarrow x^۲+x^۲+y^۲+y^۲+z^۲+z^۲-۲xy-۲yz-۲zx\geq ۰$$

$\Rightarrow (x-y)^۲+(x-z)^۲+(y-z)^۲\geq ۰$ همیشه درست

پ) ابتدا طرفین نامساوی را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$x^۲+y^۲+۱\geq xy+x+y \Rightarrow ۲x^۲+۲y^۲+۲\geq ۲xy+۲x+۲y$$

$$\Rightarrow x^۲+x^۲+y^۲+y^۲+۱+۱-۲xy-۲x-۲y\geq ۰ \Rightarrow (x-y)^۲+(x-۱)+(y-۱)^۲\geq ۰$$

همیشه درست

۶۷ ۱) گیریم $\alpha-\beta$ گویا باشد از طرفی $\alpha+\beta$ گویاست پس مجموع آن‌ها یعنی $\alpha+\beta+\alpha-\beta=۲\alpha$ گویا بوده و در نتیجه α نیز گویاست که با فرض تناقض دارد پس $\alpha-\beta$ گنگ است.

روش دوم:

$$\alpha-\beta=\overbrace{(\alpha+\beta)}^{\text{گویا}}-\overbrace{۲\beta}^{\text{گنگ}}=\text{گنگ}$$

۲) گیریم $\alpha+۲\beta$ گویا باشد از طرفی $\alpha+\beta$ گویاست پس تفاضل آن‌ها یعنی $(\alpha+۲\beta)-(\alpha+\beta)=\beta$ گویاست که با فرض تناقض دارد پس $\alpha+۲\beta$ گنگ است.

روش دوم:

$$\alpha+۲\beta=\overbrace{(\alpha+\beta)}^{\text{گویا}}+\overbrace{\beta}^{\text{گنگ}}=\text{گنگ}$$

۶۸ خیر - اثبات بُرهان خلف: گیریم چنین اعدادی وجود داشته باشد، بنابراین:

$$\frac{۱}{a+b}=\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}\Rightarrow\frac{۱}{a+b}=\frac{a+b}{ab}\Rightarrow(a+b)^۲=ab\Rightarrow a^۲+b^۲+۲ab=ab$$

$$\Rightarrow a^۲+b^۲+ab=۰\overset{\times۲}{\to}۲a^۲+۲b^۲+۲ab=۰\Rightarrow a^۲+a^۲+b^۲+b^۲+۲ab=۰$$

$$\Rightarrow(a+b)^۲+a^۲+b^۲=۰\Rightarrow a=۰\wedge b=۰\wedge a+b=۰\Rightarrow\text{تناقض}$$

۶۹

$$\left.\begin{array}{l}۵|۴k+۱\xrightarrow{\text{توان ۲}}۲۵|۱۶k^۲+۸k+۱\\ ۵|۴k+۱\overset{\times۵}{\to}۲۵|۲۰k+۵\end{array}\right\}\overset{+}{\to}۲۵|۱۶k^۲+۲۸k+۶$$

توجه: $\left.\begin{array}{l}a|b\\a|c\end{array}\right\}\Rightarrow a|bx+۲y$

۷۰

$$a|b\xrightarrow{\text{توان } m}a^m|b^m\xrightarrow{\text{راست}\times b^{n-m}}a^m|b^m\times b^{n-m}\Rightarrow a^m|b^n$$

توجه: $x|y\Rightarrow x|ky$

۷۱ گیریم:

$$n\in Z, a=۲n+۱\xrightarrow{b|a+۲}b|۲n+۳\Rightarrow \text{عددی فرد است } b\Rightarrow b=۲m+۱, m\in Z$$

$$a^۲+b^۲+۳=(۲n+۱)^۲+(۲m+۱)^۲+۳=۴n^۲+۴n+۱+۴m^۲+۴m+۱+۳$$

$$=۴\underbrace{n(n+۱)}_{۲k}+۴\underbrace{m(m+۱)}_{۲k'}+۵=۸k+۸k'+۵=۸\underbrace{(k+k')}_{q}+۵\Rightarrow r=۵$$

روش دوم:

$$\text{توجه}: x=\text{فرد}\Rightarrow x^۲=۸q+۱\Rightarrow\begin{cases}a^۲+b^۲+۳=(۸q+۱)+(۸q'+۱)+۳=۸(q+q')+۵\Rightarrow r=۵\\ a, b=\text{فرد}\end{cases}$$

۷۲ روش اول: گیریم باقیمانده‌ی تقسیم دو عدد a و b بر m برابر r باشد، در نتیجه:

$$a\overset{m}{\equiv}r\wedge b\overset{m}{\equiv}r\Rightarrow a\overset{m}{\equiv}b$$

روش دوم:

$$\begin{array}{l}a=mq+r\\b=mq'+r\end{array}\Rightarrow a-b=m(q-q')\Rightarrow m|a-b\xrightarrow{\text{تعریف همنهشتی}}a\overset{m}{\equiv}b$$

۷۳

$$(۲۳)^{۵۱}=(۱۱+۱۲)^{۵۱}\overset{۱۱\times۱۲}{\equiv}۱۱^{۵۱}+۱۲^{۵۱}\xrightarrow{-۱۱^{۵۱}-۱۲^{۵۱}}۲۳^{۵۱}-۱۱^{۵۱}-۱۲^{۵۱}\overset{۱۳۲}{\equiv}۰$$

$$\Rightarrow \text{عدد } ۲۳^{۵۱}-۱۱^{۵۱}-۱۲^{۵۱} \text{ بر } ۱۳۲ \text{ بخش پذیر است}$$

۷۴

$$\left.\begin{array}{r} 1! \overset{10}{\equiv} 1 \\ 2! \overset{10}{\equiv} 2 \\ 3! \overset{10}{\equiv} 6 \\ 4! = 24 \overset{10}{\equiv} 4 \\ 5! = 120 \overset{10}{\equiv} 0 \\ 6! \overset{10}{\equiv} 0 \\ \vdots \\ 500! \overset{10}{\equiv} 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{+} A \overset{10}{\equiv} 1+2+6+4+0+\ldots+0 = 13$$

$\xrightarrow{13 \overset{10}{\equiv} 3} A \overset{10}{\equiv} 3$ رقم یکان عدد A ، ۳ است.

۷۵

$$5a+9 \overset{11}{\equiv} 0 \Rightarrow 5a \overset{11}{\equiv} -9 \Rightarrow 5a \overset{11}{\equiv} -9+4\times 11 = 35 \xrightarrow{\div 5} a \overset{11}{\equiv} 7$$

$$\Rightarrow a = 11k+7, k \in \mathbb{Z}$$

۷۶ تعداد گل‌های نوع اول را x و تعداد گل‌های نوع دوم را y می‌نامیم، بنابراین:

$$x+y=9 \Rightarrow x=-y+9 \Rightarrow x \overset{1}{\equiv} 9 \Rightarrow x=k+9 \xrightarrow{x+y=9} k+9+y=9 \Rightarrow y=-k$$

k	۰	-۱	-۲	-۳	-۴	-۵	-۶	-۷	-۸	-۹
	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰
	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹

به ده طریق می‌توان یک دسته گل شامل ۹ شاخه تهیه کرد.

روش دوم:

$$\xrightarrow{\text{(فصل سوم)}} x_1+\cdots+x_k = m \xrightarrow{\text{تعداد جواب حسابی}} \binom{m+k-1}{k-1}$$

$$\Rightarrow x_1+x_2=9 \xrightarrow{\text{حسابی}} \binom{10}{1} = 10$$

۷۷

$$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2| = |\overline{A_1 \cup A_2}| = |S| - |A_1| - |A_2| + |A_1 \cap A_2|$$

$$= 350 - \left[\frac{350}{4}\right] - \left[\frac{350}{6}\right] + \left[\frac{350}{12}\right] = 234$$ (ص ۸۴)

توجه: تعداد مضارب k از ۱ تا n برابر است با $\left[\frac{n}{k}\right]$.

۷۸

$$a+\frac{1}{a} \geq 2 \Leftrightarrow a^2+1 \geq 2a \Leftrightarrow a^2-2a+1 \geq 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 \geq 0$$

همواره برقرار است، پس با برگشت روابط حکم برقرار می‌باشد. (ص ۷)

۷۹

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m|a-b \Rightarrow m|c(a-b) \Rightarrow m|\mathrm{ac}-\mathrm{bc} \Rightarrow \mathrm{ac} \overset{m}{\equiv} \mathrm{bc}$$ (ص ۱۹)

۸۰

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m|a-b \Rightarrow m|(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+b^{n-1}) \Rightarrow m|a^n-b^n$$

$$\Rightarrow a^n \overset{m}{\equiv} b^n$$ (ص ۲۹)

۸۱ $p=4k(1), p=4k+1(2), p=4k+2=2(2k+1)(3), p=4k+3(4)$

در حالت ۱ و ۳، p عددی زوج است که با اول بودن آن تناقض دارد. بنابراین اعداد اول به فرم ۲ یا ۴ خواهند بود.
(ص ۱۵)

۸۲ فرض کنیم r یک عدد گویا و x یک عدد گنگ است. نشان می‌دهیم که $r+x$ یک عدد گنگ است.
فرض خلف: فرض کنیم $r+x$ گویا باشد. می‌دانیم تفاضل دو عدد گویا عددی گویا است. پس $r+x-r \in Q$ یعنی $x \in Q$ و این با فرض گنگ بودن x تناقض دارد. پس فرض خلف باطل و حکم اثبات می‌شود. (ص ۵)

۸۳ $2y \overset{5}{\equiv} 18 \xrightarrow{(2,5)=1} y \overset{5}{\equiv} 9 \overset{5}{\equiv} 4 \Rightarrow y=5k+4 \Rightarrow 5x+2(5k+4)=18$
$\Rightarrow x=-2k+2$ (ص ۲۹)

۸۴ $A=\{1 \le n \le 200 | n=4k\} \Rightarrow |A|=\left[\frac{200}{4}\right]=50, B=\{1 \le n \le 200 | n=7k\}$
$A \cap B=\{1 \le n \le 200 | n=28k\} \Rightarrow |A \cap B|=\left[\frac{200}{28}\right]=7$
$|A \cap B'|=|A|-|A \cap B|=50-7=43$ (ص ۸۳)

۸۵ $n=2k \Rightarrow n^2-5n+7=4k^2-10k+6+1=2(2k^2-5k+3)+1=2q+1$ (ص ۴)

۸۶ $\begin{matrix} 5|4k+1 \Rightarrow 25|16k^2+8k+1 \\ 5|4k+1 \Rightarrow 25|20k+5 \end{matrix} \xrightarrow{+} 25|16k^2+28k+6$ (ص ۱۶)

۸۷ فاصله ۱ مهر تا ۱۲ بهمن برابر است با: ۲۹ روز در مهر ماه و سه ماه آبان، آذر و دی و ۱۲ روز تا ۱۲ بهمن، یعنی
$131=12+30\times 3+29$. از طرفی $131 \overset{7}{\equiv} 5$. بنابراین طبق جدول زیر ۱۲ بهمن پنج‌شنبه است. (ص ۲۴)

ش	ی	د	س	چ	پ	ج
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

۸۸ $\begin{matrix} a=6q+3 \\ a=7q'+5 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 7a=42q+21 \\ 6a=42q'+30 \end{matrix} \Rightarrow a=42(q-q'-1)+33 \Rightarrow r=33$ (ص ۱۴)

۸۹ الف) درست　　ب) نادرست　　پ) نادرست　　ت) درست

۹۰ $\begin{matrix} a|6(5m+4) \\ a|5(6m+5) \end{matrix} \Rightarrow a|5(6m+5)-6(5m+4) \Rightarrow a|1 \Rightarrow a=\pm 1$ (ص ۱۱)

۹۱ $2x^2+2xy+y^2 \ge 4x-4 \Leftrightarrow x^2+2xy+y^2+x^2-4x+4 \ge 0 \Leftrightarrow (x+y)^2+(x-2)^2 \ge 0$
این رابطه همواره برقرار است. (ص ۸)

۹۲ $b=2k, b|a+2 \Rightarrow a+2=bq \Rightarrow a=2t$
که با فرض سؤال در تناقض است. (ص ۱۶)

۹۳ $ac \overset{m}{\equiv} bc, (c,m)=d \Rightarrow a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b$

۹۴ برهان خلف

فرض خلف: فرض کنیم $f+g$ در $x=a$ پیوسته است. چون f هم در $x=a$ پیوسته است؛ بنابراین $(f+g)-f=g$ در $x=a$ پیوسته است. پس g در $x=a$ پیوسته است و این متناقض با فرض است، در نتیجه فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

۹۵ هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ به صورت $a=۶p\pm ۱$ است. بنابراین داریم:

$$a^۲-۱=(۶p\pm ۱)^۲-۱=۳۶p^۲\pm ۱۲p+۱-۱=۱۲\underbrace{(۳p^۲\pm p)}_{k\in z}$$

۹۶ درست (ص ۳) $۲k\times(۲k+۲)+۱=۴k^۲+۴k+۱=(۲k+۱)^۲$

۹۷ $a|b\Rightarrow b=aq, q\in\mathbb{Z}\Rightarrow |b|=|a|\,|q|$

$q\in\mathbb{Z}, q\neq ۰\Rightarrow |q|\geq ۱\Rightarrow |a|\,|q|\geq|a|\Rightarrow |b|\geq|a|$ (ص ۱۱)

۹۸ الف) اگر a زوج باشد $(a=۲k)$، عدد بعدی $a+۱=۲k+۱$ خواهد بود، پس داریم:

$a(a+۱)=۲k(۲k+۱)=۲q\Rightarrow ۲|a(a+۱)$

ب) اگر a فرد باشد $(a=۲k+۱)$، عدد بعدی $a+۱=۲k+۲$ است و داریم:

$a(a+۱)=(۲k+۱)(۲k+۲)=۲(۲k+۱)(k+۱)=۲q\Rightarrow ۲|a(a+۱)$

بنابراین حاصل‌ضرب هر دو عدد متوالی، زوج است.

۹۹

$$\left.\begin{array}{l} a|۷m+۶\xrightarrow{\times ۶}a|۴۲m+۳۶\\ a|۶m+۵\xrightarrow{\times ۷}a|۴۲m+۳۵\end{array}\right\}\Rightarrow a|(۴۲m+۳۶)-(۴۲m+۳۵)\Rightarrow a|۱\Rightarrow a=\pm ۱$$

۱۰۰ اگر آن عدد را x فرض کنیم، باید $۷|۳x-۱۳$ یا $۳x\overset{۷}{\equiv}۱۳$ حال داریم:

$$۳x\overset{۷}{\equiv}۱۳\Rightarrow ۳x\overset{۷}{\equiv}۶\xrightarrow{\div ۳}x\overset{\frac{۷}{(۷,۳)}}{\equiv}۲\Rightarrow x\overset{۷}{\equiv}۲\Rightarrow x=۷k+۲$$