

۱ اگر $A(-1, 2)$, $B(-3, -4)$ و $C(0, 8)$ تشکیل یک مثلث دهند، طول میانه‌ی AM کدام است؟

- ۱ ۱/۴ ۲ ۱/۲ ۳ ۵/۲ ۴ ۳/۲

۲ معادله $(x^2 - 6x) + 2(x^2 - 6x) = 6^3$ چند ریشه حقیقی دارد؟

- ۱ ۱ ۲ ۲ ۳ ۳ ۴ ۴

۳ اگر $A(2, 5)$ و $B(-1, 8)$ باشند، عمودمنصف AB محور y ها را با چه عرضی قطع می‌کند؟

- ۱ ۳ ۲ ۵ ۳ ۵/۵ ۴ ۶

۴ اگر یکی از ریشه‌های معادله‌ی $(1 + m^2)x^2 - (m + 6)x = 15$ برابر ۵ باشد، مربع دو برابر ریشه‌ی دیگر چقدر است؟ $(m > 0)$

- ۱ ۹ ۲ ۹/۲ ۳ ۷/۲ ۴ ۷

۵ یک سهمی محور y ها را در نقطه‌ای به عرض -۳ و محور x ها را در نقاط به طول ۱ و ۳ قطع کرده است. معادله‌ی سهمی کدام است؟

- ۱ $y = -x^2 - 4x - 3$ ۲ $y = x^2 - 4x - 3$
 ۳ $y = x^2 + 4x - 3$ ۴ $y = -x^2 + 4x - 3$

۶ تعداد جواب‌های حقیقی معادله $\frac{x+4}{x^2+2x-8} + \frac{1-x}{x^2+x-2} = \frac{1}{3}$ کدام است؟

- ۱ صفر ۲ ۱ ۳ ۲ ۴ بی‌شمار

۷ اگر α و β ریشه‌های معادله $3x^2 + 4x = 2$ باشد، مجموعه ریشه‌های کدام معادله به صورت $(2\alpha - 1, 2\beta - 1)$ است؟

- ۱ $3x^2 - 5x + 7 = 0$ ۲ $3x^2 + 11x - 7 = 0$
 ۳ $3x^2 + 14x + 3 = 0$ ۴ $3x^2 + 8x - 9 = 0$

۸ در معادله $4x^2 - 16x + m = 0$ ، اگر یکی از ریشه‌ها ۳ واحد از ریشه دیگر بزرگ‌تر باشد، مجموع مکعبات دو ریشه کدام است؟

- ۱ ۴۳ ۲ ۴۴ ۳ ۴۵ ۴ ۴۶

۹ اگر فاصله مبدأ مختصات از خط $x + 2y = m$ برابر $2\sqrt{5}$ باشد، m کدام است؟

- ۱ ± 5 ۲ ۱۰ ۳ ± 10 ۴ -۱۰

۱۰ خط $3x - 4y - 2 = 0$ بر دایره به مرکز $O(-2, 3)$ مماس است. مساحت دایره کدام است؟

22π ۴

8π ۳

4π ۲

16π ۱

۱

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا مختصات نقطه‌ی M وسط پاره‌خط BC را به دست می‌آوریم:

$$M\left(\frac{-3+0}{2}, \frac{-4+8}{2}\right) \Rightarrow M\left(-\frac{3}{2}, 2\right)$$

$$AM = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}+1\right)^2 + (2-2)^2} = \frac{1}{2}$$

سپس فاصله‌ی دو نقطه‌ی A و M را به دست می‌آوریم:

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۲

$$x^2 - 6x = t \Rightarrow t^2 + 2t - 6^2 = 0 \Rightarrow (t+9)(t-7) = 0 \Rightarrow t = 7 \text{ یا } t = -9$$

$$x^2 - 6x = 7 \Rightarrow x^2 - 6x - 7 = 0 \Rightarrow (x+1)(x-7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 7 \end{cases}$$

$$x^2 - 6x = -9 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow (x-3)^2 = 0 \Rightarrow x = 3$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۳

$$AB \text{ شیب پاره خط } m_{AB} = \frac{8-5}{-1-2} = -1 \Rightarrow \text{شیب عمودمنصف } m = 1$$

$$AB \text{ مختصات } M \text{ وسط پاره خط } \frac{A+B}{2} = \left(\frac{-1+2}{2}, \frac{5+8}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{13}{2}\right)$$

حالا معادله عمودمنصف AB را می‌نویسیم:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - \frac{13}{2} = 1\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

برای پیدا کردن عرض نقطه برخورد با محور y ها، x را برابر صفر می‌گذاریم:

$$\xrightarrow{x=0} y - \frac{13}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = 6$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. باید $x = 5$ در معادله صدق کند.

۴

$$x = 5 \Rightarrow (1+m^2)(5)^2 - (m+6)5 - 15 = 0 \xrightarrow{\div 5}$$

$$5 + 5m^2 - m - 6 - 3 = 0 \Rightarrow 5m^2 - m - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$$m = 1 \Rightarrow 2x^2 - 7x - 15 = 0 \Rightarrow (x-5)(2x+3) = 0$$

ریشه‌ی دیگر معادله $-\frac{3}{2}$ و مربع دو برابر آن یعنی $(2x)^2$ که برابر ۹ خواهد شد.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی متناظر باشند، داریم:

۵

$$y = a(x - x_1)(x - x_2) \Rightarrow y = a(x - 1)(x - 3) \Rightarrow y = a(x^2 - 4x + 3)$$

$$\text{روی سهمی قرار دارد. } (0, -3) \Rightarrow -3 = a(0 - 0 + 3) \Rightarrow a = -1$$

$$\text{معادله سهمی: } y = -x^2 + 4x - 3$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مخرج کسرها را تجزیه، سپس عبارت را ساده و در ک.م.م مخرج‌ها ضرب می‌کنیم.

۶

$$\frac{x+4}{(x+4)(x-2)} + \frac{1-x}{(x+2)(x-1)} = \frac{1}{3}$$

$$\xrightarrow{x \neq -4 \text{ و } 1} \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} = \frac{1}{3}$$

$$\xrightarrow{\times 2(x-2)(x+2)} 2(x+2) - 2(x-2) = (x-2)(x+2)$$

$$\Rightarrow 12 = x^2 - 4 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$$

از میان این جوابها، فقط $x = 4$ قابل قبول است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۷

$$S = 2(\alpha + \beta) - 2 = 2\left(\frac{-4}{3}\right) - 2 = \frac{-8}{3} - 2 = \frac{-14}{3}$$

$$P = (2\alpha - 1)(2\beta - 1) = 4\alpha\beta - 2(\alpha + \beta) + 1 = \frac{-8}{3} + \frac{8}{3} + 1 = 1$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow 3x^2 + 14x + 3 = 0$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. فرض: α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم و $\beta = \alpha - 3$

$$\begin{cases} 4\alpha^2 - 16\alpha + m = 0 \\ 4(\alpha - 3)^2 - 16(\alpha - 3) + m = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4\alpha^2 - 16\alpha + m = 0 \\ 4\alpha^2 - 24\alpha + 36 - 16\alpha + 48 + m = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4\alpha^2 - 16\alpha + m = 0 \\ 4\alpha^2 - 40\alpha + 84 + m = 0 \end{cases} \Rightarrow 24\alpha - 84 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{84}{24} = \frac{7}{2}$$

در نتیجه:

$$\beta = \frac{7}{2} - 3 = \frac{1}{2}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{49}{4} + \frac{1}{4} = \frac{50}{4} = \frac{25}{2} = 12.5$$

بنابراین:

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۹

$$x + 2y - m = 0, O(0, 0) \Rightarrow \frac{|0 + 0 - m|}{\sqrt{1 + 4}} = 2\sqrt{5} \Rightarrow |m| = 10 \Rightarrow m = \pm 10$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. می‌دانیم فاصله مرکز دایره از خط مماس بر آن برابر شعاع دایره است.

کافی است فاصله مرکز دایره را از خط بیابیم:

$$2x - 4y - 2 = 0 \text{ و } O(-2, 3)$$

$$R = \frac{|2(-2) - 4(3) - 2|}{\sqrt{2^2 + (-4)^2}} = \frac{|-4 - 12 - 2|}{\sqrt{4 + 16}} = \frac{18}{\sqrt{20}} = \frac{9\sqrt{5}}{5} = 4$$

بنابراین $R = 4$ و مساحت دایره برابر است با:

$$S = \pi R^2 \xrightarrow{R=4} S = 16\pi$$

پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴

