

۱) اگر $f = \{(1, 2), (3, -1), (4, 2)\}$ و $g(x) = \frac{1}{x-1}$ ، مجموع اعضای برد تابع $f + g$ کدام است؟

- ۱) $\frac{10}{3}$
 ۲) $\frac{11}{7}$
 ۳) $\frac{11}{6}$
 ۴) $\frac{10}{7}$

۲) اگر دامنه‌ی تابع $f(x) = \frac{x+4}{2x^2 - ax + b - 5}$ برابر $R - \{2\}$ باشد، $a + b$ کدام است؟

- ۱) ۵
 ۲) ۲۱
 ۳) -۵
 ۴) ۱۳

۳) اگر تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x \geq 2 \\ \frac{x}{4} + m & x < 2 \end{cases}$ یک‌به‌یک باشد، حدود m کدام است؟

- ۱) $m < 5$
 ۲) $m \leq 5$
 ۳) $m > 4$
 ۴) $m \geq 4$

۴) اگر $f = \{(2, 6), (1, -2), (a^2 + a, 6), (a, 2)\}$ تابعی وارون‌پذیر باشد، برد تابع $f + f^{-1}$ کدام است؟

- ۱) $\{1, 4\}$
 ۲) $\{3, 8\}$
 ۳) $\{3, 4\}$
 ۴) $\{0, -1\}$

۵) کدام تابع با دامنه $\{-1, 1, 3, \frac{5}{4}, 4, 5\}$ وارون‌پذیر است؟

- ۱) $y = \frac{2x-1}{x-2}$
 ۲) $y = \frac{x+1}{x-1}$
 ۳) $y = \frac{2x+1}{x-1}$
 ۴) $y = \frac{x}{2x-3}$

۶) ضابطه وارون تابع $f(x) = 2x - 2$ کدام است؟

- ۱) $f^{-1}(x) = -3x + 2$
 ۲) $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$
 ۳) $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$
 ۴) $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$

۷) دامنه‌ی تابع $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{2x+3}}$ شامل چند عدد صحیح می‌باشد؟

- ۱) صفر
 ۲) ۱
 ۳) ۲
 ۴) بی‌شمار

۸) اگر $f = \{(-2, 2), (m, 3), (-1, 3), (2m, a)\}$ تابعی یک به یک باشد، مقدار $a + m$ برابر کدام است؟

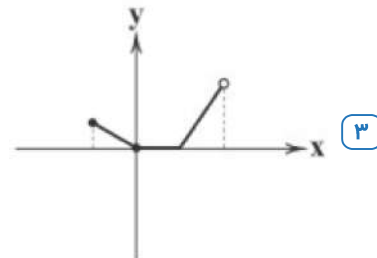
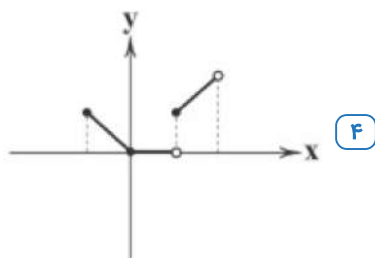
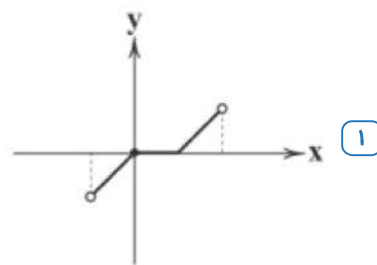
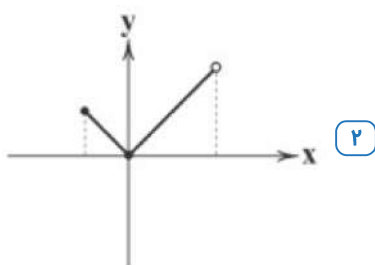
- ۱) ۱
 ۲) صفر
 ۳) ۳
 ۴) -۲

۹) اگر $f(x) = \sqrt{x+1}$ و $g(x) = \frac{x+1}{x-2}$ مقدار $(2f - g)(3)$ کدام است؟

- ۱) -۱
 ۲) صفر
 ۳) ۱
 ۴) ۲

نمودار تابع $f(x) = x[x]$ در فاصله $-1 \leq x < 2$ کدام است؟

۱۰



گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$(f+g)(1) = f(1) + g(1) = \text{تعریف نمی شود}$$

$$(f+g)(3) = f(3) + g(3) = -1 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$$

$$(f+g)(4) = f(4) + g(4) = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$-\frac{2}{3} + \frac{7}{3} = \frac{-2+7}{3} = \frac{5}{3}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به ضابطه‌ی تابع، تنها در صورتی دامنه‌ی تابع $f(x) = \frac{x+4}{2x^2 - ax + b - 5}$ به صورت

$R - \{2\}$ می‌باشد که مخرج کسر، ریشه‌ی مضاعف $x = 2$ داشته باشد. پس با توجه به ضریب x^2 در مخرج کسر، ضابطه‌ی

تابع f به صورت زیر است:

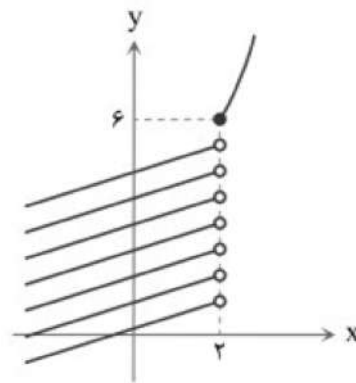
$$f(x) = \frac{x+4}{2(x-2)^2} = \frac{x+4}{2x^2 - 8x + 8} = \frac{x+4}{2x^2 - ax + b - 5} \Rightarrow \begin{cases} -a = -8 \Rightarrow a = 8 \\ b - 5 = 8 \Rightarrow b = 13 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a + b = 21$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. برای این که تابع f یک‌به‌یک باشد، باید اشتراک برد ضابطه‌های متفاوت آن برابر \emptyset باشد. اگر

نمودار تابع f را رسم کنیم، در این صورت مشخص می‌شود که برد ضابطه‌ی اول، به صورت $R_1 = [4, +\infty)$ است. یعنی

داریم:



$$x \geq 2 \Rightarrow x^2 \geq 4 \Rightarrow x^2 + 2 \geq 6 \Rightarrow y \geq 6$$

پس باید در برد ضابطه دوم، حداکثر مقدار تابع، کمتر از ۶ باشد یعنی داریم:

$$x < 2 \Rightarrow \frac{x}{2} < 1 \Rightarrow \frac{x}{2} + m < 1 + m \Rightarrow 1 + m \leq 6 \Rightarrow m \leq 5$$

به‌ازای $m \leq 5$ ، برد ضابطه‌ی دوم به صورت $R_2 = (-\infty, 6)$ خواهد بود و تابع f یک‌به‌یک خواهد بود.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. تابع f باید یک‌به‌یک باشد، پس:

۴

$$\left. \begin{array}{l} (2, 6) \in f \\ (a^2 + a, 6) \in f \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow a^2 + a = 2 \Rightarrow a^2 + a - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -2 \end{cases} \text{ (تابع یک به یک نمی شود)}$$

با جای‌گذاری $a = -2$ ، f به صورت زیر درمی‌آید:

$$f = \{(2, 6), (1, -2), (-2, 2)\}$$

پس:

$$f^{-1} = \{(6, 2), (-2, 1), (2, -2)\}$$

حالا $f + f^{-1}$ را تشکیل می‌دهیم:

$$D_{f+f^{-1}} = D_f \cap D_{f^{-1}} = \{-2, 2\}$$

$$f + f^{-1} = \{(-2, 2+1), (2, 6+(-2))\} = \{(-2, 3), (2, 4)\} \Rightarrow \text{برد} = \{3, 4\}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۵

در تابع $y = \frac{2x-1}{x-2}$ داریم: $xy - 2y - 2x = -1$ ، مقادیر x و y می‌توانند جابه‌جا شوند، ثانیاً در دامنه مفروض اگر مقادیر

برد را محاسبه کنیم، برد تابع با دامنه آن برابر می‌شود، تابع یک‌به‌یک است پس وارون‌پذیر است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۶

$$y = 3x - 2 \Rightarrow y + 2 = 3x \Rightarrow x = \frac{y}{3} + \frac{2}{3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۷

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{2x+3} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{2x+3} \leq 1 \rightarrow \\ 2x+3 \leq 1 \Rightarrow 2x \leq -2 \Rightarrow x \leq -1 \quad (1) \\ 2x+3 \geq 0 \Rightarrow 2x \geq -3 \Rightarrow x \geq -\frac{3}{2} \Rightarrow x \geq -1/5 \quad (2) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1), (2)} \begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq -1/5 \end{cases} \Rightarrow -1/5 \leq x \leq -1 \Rightarrow x \in [-1/5, -1]$$

در بازه‌ی فوق فقط عدد صحیح -1 وجود دارد.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. یک تابع به صورت مجموعه زوج‌های مرتب، هنگامی یک‌به‌یک است که در آن زوج‌های مرتب

۸

متمایز، مؤلفه‌های دوم مساوی نداشته باشند، یا به عبارتی اگر زوج‌های مرتب، مؤلفه‌های دوم مساوی داشته باشند،

مؤلفه‌های اول آن‌ها نیز با هم برابر باشند، بنابراین:

$$(m, 3) = (-1, 3) \Rightarrow m = -1 \Rightarrow f = \{(-2, 2), (-1, 3), (-2, a)\}$$

چون f یک تابع است، باید زوج‌های مرتب $(-2, a)$ و $(-1, 3)$ نیز با یکدیگر برابر باشند، بنابراین:

$$(-2, a) = (-2, 2) \Rightarrow a = 2 \Rightarrow a + m = 2 + (-1) = 1$$

$$f(x) = \sqrt{x+1}, g(x) = \frac{x+1}{x-2}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۹

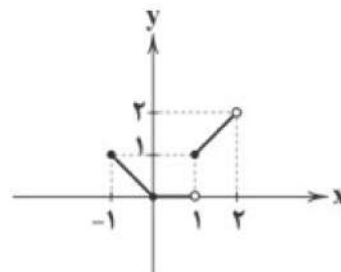
$$(2f - g)(3) = 2f(3) - g(3) = 2\sqrt{3+1} - \frac{3+1}{3-2} = 4 - 4 = 0$$

$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow y = x[x] = x(-1) = -x \Rightarrow f(x) = -x$$

$$\Rightarrow (-1, 1), (0, 0)$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow y = x[x] = x(0) = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow (0, 0), (1, 0)$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow y = x[x] = x(1) = x \Rightarrow f(x) = x \Rightarrow (1, 1), (2, 2)$$



پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴

